Matematika

Dicky Susanto, dkk

SMA/SMK Kelas X

Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis
Dicky Susanto, Theja Kurniawan, Savitri K. Sihombing, Eunice Salim, Marianna Magdalena Radjawane, Ummy Salmah, Ambarsari Kusuma Wardani

Penelaah
Sunardi dan Azhary Masta

Penyelia
Pusat Kurikulum dan Perbukuan

Ilustrator
Faris M. Naufal

Penyunting
Tri Hartini

Penata Letak (Desainer)
M. Firdaus Jubaedi

Penerbit
Pusat Kurikulum dan Perbukuan
Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Kebudayaan
Jalan Gunung Sahari Raya No. 4 Jakarta Pusat

Cetakan pertama, 2021
ISBN 978-602-244-525-8 (Jilid Lengkap)
ISBN 978-602-244-526-5 (Jilid 1)

Isi buku ini menggunakan huruf Minion Pro 11/15 pt, Robert Slimbach
xviii, 270 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi mempunyai tugas penyiapan kebijakan teknis, pelaksanaan, pemantauan, evaluasi, dan pelaporan pelaksanaan pengembangan kurikulum serta pengembangan, pembinaan, dan pengawasan sistem perbukuan. Pada tahun 2020, Pusat Kurikulum dan Perbukuan mengembangkan kurikulum beserta buku teks pelajaran (buku teks utama) yang mengusung semangat merdeka belajar. Adapun kebijakan pengembangan kurikulum ini tertuang dalam Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah.

Kurikulum ini memberikan keleluasan bagi satuan pendidikan dan guru untuk mengembangkan potensinya serta keleluasan bagi siswa untuk belajar sesuai dengan kemampuan dan perkembangannya. Untuk mendukung pelaksanaan Kurikulum tersebut, diperlukan penyediaan buku teks pelajaran yang sesuai dengan kurikulum tersebut. Buku teks pelajaran ini merupakan salah satu bahan pembelajaran bagi siswa dan guru.

Pada tahun 2021, kurikulum ini akan diimplementasikan secara terbatas di Sekolah Penggerak dan SMK Pusat Keunggulan. Hal ini sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 1177 Tahun 2020 tentang Program Sekolah Penggerak. Tentunya umpan balik dari guru dan siswa, orang tua, dan masyarakat di Sekolah Penggerak sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan kurikulum dan buku teks pelajaran ini.

Selanjutnya, Pusat Kurikulum dan Perbukuan mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang terlibat dalam penyusunan buku ini mulai dari penulis, penelaah, reviewer, supervisor, editor, ilustrator, desainer, dan pihak terkait lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Semoga buku ini dapat bermanfaat untuk meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Juni 2021
Kepala Pusat Kurikulum dan Perbukuan,

Maman Fathurrohman, S.Pd.Si., M.Si., Ph.D.
NIP 19820925 200604 1 001

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya dalam menyelesaikan penulisan buku siswa ini. Buku ini disusun untuk memenuhi Capaian Pembelajaran Fase E untuk SMA/MA Kelas X sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah.

Matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat mengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun. Sebagian besar pembelajaran matematika dalam buku ini diupayakan menarik perhatian dan minat siswa sehingga "tidak merasa sedang belajar matematika". Siswa akan diajak untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan siswa akan berdiskusi, berkomunikasi, bekerja sama, dan menggunakan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga mengasah kemampuan sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21.

Kami menghaturkan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya para penelaah, yaitu Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. (Universitas Negeri Jember) dan Dr. Al Azhary Masta, M.Si. (Universitas Pendidikan Indonesia) untuk bimbingan dan masukan yang berharga dari awal sampai akhir proses penulisan.

Akhir kata, kami berharap buku ini bermanfaat bagi pembelajaran matematika SMA/MA Kelas X, dan semakin banyak siswa yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat bermatematika!

Jakarta, Februari 2021

Tim Penulis

Daftar Isi

Bab 4. Trigonometri

Bab 5. Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Petunjuk Penggunaan Buku

Pembuka Bab

Seberapa besar kemungkinan akan turunnya hujan? Berapa persen kemungkinan seseorang terpapar Covid-19? Berapa persen kemungkinan seseorang memiliki golongan darah AB-? Semua pertanyaan ini berhubungan dengan kemungkinan suatu kejadian yang merupakan bagian dari kehidupan kita sehari-hari. Kalian bisa memprediksi kemungkinan suatu kejadian dengan menggunakan salah satu bidang matematika yang disebut **peluang**.

Kalian menemukan pembuka bab sebagai bagian paling awal dari bab yang memberikan gambaran besar mengenai topik yang akan dipelajari. Ada rasionalisasi dalam bab sehingga timbul minat dan motivasi kalian untuk mempelajari ide utama atau ide besar yang menghubungkan konsep-konsep.

Pertanyaan Pemantik

Pertanyaan Pemantik

1. Bagaimana kalian dapat menentukan peluang dari dua kejadian acak yang terkait seperti melempar dua dadu?
2. Dalam kondisi apa kalian dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?

Kalian menemukan bagian ini pada awal bab karena merupakan pertanyaan yang menuntun pemahaman materi dan pengembangannya sepanjang pembelajaran bab tersebut. Kalian akan menemukan kedalaman dan keluasan dari materi pelajaran tersebut melalui pertanyaan tersebut.

Kata Kunci

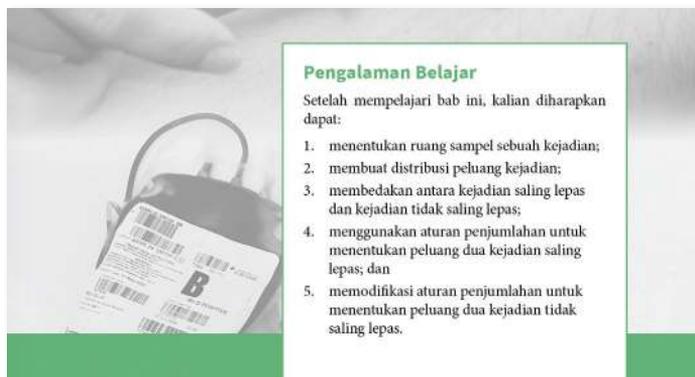
Kata Kunci

Peluang, ruang sampel, kejadian saling lepas, kejadian tidak saling lepas.

Kata atau konsep yang merupakan kunci untuk dihubungkan dengan kata atau konsep lain. Pemahaman terhadap kata kunci menolong kalian untuk mengaitkan konsep yang satu dengan konsep lainnya.

Peta Konsep

Peta konsep yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat dalam setiap bab. Kalian perlu mencermati peta konsep ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

Pengalaman Belajar

Terdapat pada awal bab yang menjadi arahan tercapainya kompetensi setelah mempelajari bab tersebut. Pengalaman belajar menolong kalian untuk memonitor perkembangan belajar kalian dalam bab tersebut yang akan dihubungkan dengan refleksi pada akhir pembahasan.

Ayo Bereksplorasi

Kalian melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum kalian mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

Ayo Berpikir Kritis

Kalian berpikir kritis jika kalian dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu kalian latih terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

Ayo Berpikir Kreatif

Kalian berpikir kreatif jika kalian dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

Ayo Mencoba

Kalian diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

Penguatan Karakter

Kalian diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter profil Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

Ayo Berdiskusi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan.

Hint

Petunjuk untuk kalian gunakan dalam pemecahan masalah. Baca dan gunakan bagian ini jika kalian mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

Tahukah Kalian?

Kalian mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang kalian pelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

Ayo Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

Ayo Mengingat Kembali

Apa yang telah kalian pelajari di SMP berhubungan dengan apa yang akan kalian pelajari di kelas 10. Kalian akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas 10 dengan pengetahuan yang telah dipelajari di SMP.

Ayo Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Kalian bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga

pemahaman kalian terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama memerlukan saling memahami dan menghargai satu sama lain.

Ayo Menggunakan Teknologi

Teknologi memudahkan kalian untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Kalian dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugas kalian. Kalian memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan kalian.

Contoh Soal

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\frac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{2^5 \times 2^3}{2^2} &= \frac{2^{(5+3)}}{2^2} \\ &= \frac{2^8}{2^2} \\ &= 2^{8-2} \\ &= 2^6\end{aligned}$$

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman kalian atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar kalian merasakan manfaat bagian tersebut.

Latihan

Latihan 1.1

1. Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
2. Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat
   a. $(3^4)^2 = 3^p$ b. $b^p.b^5 = b^9$ c. $(3\pi)^p = 27\pi^3$
3. Sederhanakanlah
   a. $\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3$

Kalian mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah
   a. $\left(\frac{x^{-5}y^{4}}{xy^{3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^{7}y^{-3}}{x^{-4}y^{6}}\right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$
   b. $\frac{(m^{10}n^{-2})^{3}(m^{5}n^{-6})^{3}}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$
   c. $\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0$

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi kalian untuk mengukur pencapaian kalian dalam topik bab. Kalian dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

Materi Pengayaan/Proyek

Materi Pengayaan

1. Buatlah suatu barisan geometri, dengan menentukan suku pertama, rasio, dan banyak suku pada tabel di bawah ini.

   Barisan geometri 1.

Suku pertama	....
Rasio	....
Banyak suku	....
..., ..., ..., ..., ..., ...	

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

Refleksi

Refleksi

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang eksponen dan logaritma serta bagaimana hubungan antara eksponen dan logaritma.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.
3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?
4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari.

Pada akhir bab atau subbab, kalian akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahamanmu atas pembelajaran pada bagian tersebut.

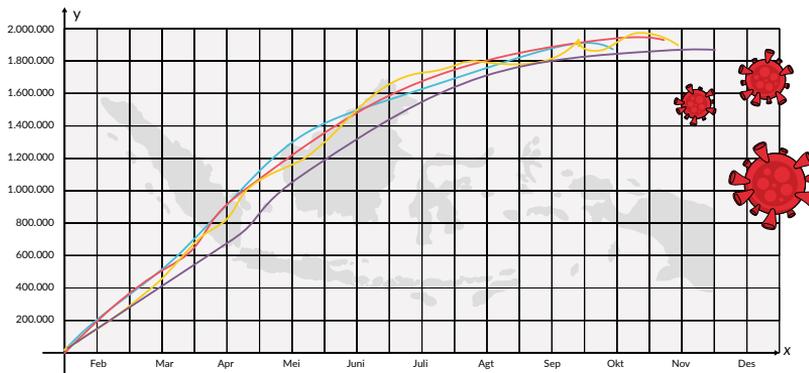
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab
1

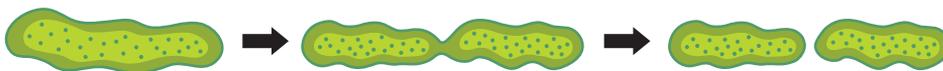
Eksponen dan Logaritma

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Mengidentifikasi sifat-sifat eksponen.
2. Mengidentifikasi bentuk akar.
3. Mengidentifikasi fungsi eksponen.
4. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponen.
5. Mengidentifikasi sifat-sifat logaritma.
6. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan logaritma.

Gambar 1.1 Grafik Eksponensial Penyebaran Covid-19

Pada tahun 2020, dunia dihadapkan dengan wabah virus Covid-19 yang menyebar di hampir seluruh negara di dunia. Di Indonesia, kasus penularan Covid-19 masih cukup tinggi dan belum menunjukkan penurunan yang signifikan, bahkan cenderung naik. Pada awal penularannya, grafik perkembangan penularan Covid-19 digambarkan sebagai bentuk eksponensial. Bentuk eksponensial menggambarkan situasi peningkatan suatu kuantitas secara pesat pada kurun waktu tertentu. Mengapa demikian? Bagaimanakah bentuk eksponensial itu?

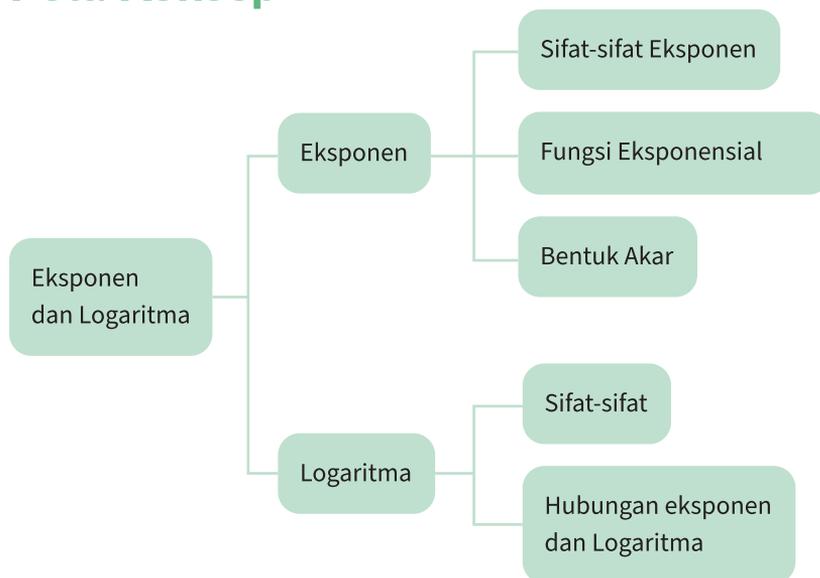
Selain itu, untuk mengamati pertumbuhan bakteri atau virus, para peneliti biasanya mengamati berapa banyak bakteri yang akan tumbuh setiap jamnya. Para peneliti mampu memprediksi berapa banyak bakteri yang akan tumbuh pada jam-jam tertentu dengan perhitungan matematika atau sebaliknya menentukan waktu yang dibutuhkan sehingga jumlah bakteri tertentu dapat tumbuh.

Gambar 1.2 Pembelahan Bakteri

Demikian pula untuk memprediksi jumlah penduduk suatu wilayah pada beberapa tahun kemudian, penghitungan matematika dapat digunakan untuk menentukannya. Dengan hanya melakukan pengamatan tentu hal tersebut tidaklah mudah. Diperlukan penghitungan tertentu untuk menentukannya.

Menurut kalian, bagaimana permasalahan-permasalahan tersebut di atas dapat dipecahkan secara matematis? Eksponen dan logaritma adalah konsep-konsep matematika yang memiliki peran yang penting untuk menyelesaikan masalah-masalah seperti yang sudah disebutkan sebelumnya. Bagaimana cara menggunakan

kedua konsep ini dalam menyelesaikan masalah-masalah seperti di atas? Dan pada konteks apa lagi kedua konsep tersebut dapat digunakan? Semua akan kalian pelajari pada bab ini.

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
Eksponen, fungsi eksponen, bilangan pokok, pangkat, bentuk akar, logaritma.	1. Bagaimana menggambarkan bentuk eksponen? 2. Bagaimana menggambarkan bentuk logaritma? 3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma? 4. Masalah sehari-hari apa yang dapat diselesaikan dengan eksponen dan logaritma?

Peta Konsep

A. Eksponen

Perkalian berulang adalah perkalian yang dilakukan secara berulang dengan faktor yang sama.

Perhatikan contoh berikut ini.

1. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ditulis dengan 2^6
2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ditulis dengan 5^8
3. $15 \times 15 \times 15 \times 15$ ditulis dengan 15^4
4. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ ditulis dengan 7^{10}
5. $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$ ditulis dengan a^7

Eksplorasi 1.1 Sifat-sifat Eksponen

Seseorang membawa virus masuk ke wilayah A. Virus tersebut menular ke penduduk di wilayah tersebut dengan cepat. Setelah diamati, orang yang membawa virus tersebut sudah menulari 2 orang lainnya. Pada fase selanjutnya, 2 orang yang tertular tersebut ternyata juga masing-masing menulari 2 orang lainnya. Pada fase berikutnya, 4 orang pada fase sebelumnya juga menulari masing-masing 2 orang lainnya. Pola penularan tersebut terus berlangsung, di mana tidak ada orang yang tertular hingga 2 kali.

1. Lengkapilah tabel di bawah ini yang akan memberikan kalian gambaran penularan virus di setiap fase hingga fase ke-8.

Fase Penularan	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyak orang yang tertular	2	4	8	...	...	...	...	...

2. Berapa orang yang tertular virus tersebut pada fase ke-10? Bagaimana kalian mengetahuinya?
3. Jika banyak fase adalah n, bagaimana merepresentasikan banyak orang yang tertular pada fase ke-n tersebut? Bagaimana kalian mengetahuinya?
4. Bagaimana hubungan antara fase penularan dan banyaknya orang yang tertular virus di setiap fasenya?

Jika terdapat 250 orang di wilayah tersebut, berapa fase penularan yang terjadi sehingga 250 orang akan tertular virus tersebut?

1. Definisi Eksponen

Perhatikan kembali **Eksplorasi 1.1** yang sudah kalian lakukan. Antara fase penularan dan banyaknya orang yang akan tertular pada setiap fasenya memiliki hubungan yang menarik. Pada Eksplorasi 1.1 kalian menemukan bahwa:

$$1 = 2^0$$
$$2 = 2 = 2^1$$
$$4 = 2\times2 = 2^2$$
$$8 = 2\times2\times2 = 2^3$$
$$16 = 2\times2\times2\times2 = 2^4$$
$$\vdots$$
$$m = 2\times2\times2\times2\times2\times\ldots\times2 = 2^n$$

Jadi, banyaknya orang yang tertular pada setiap fase adalah perkalian bilangan 2 sebanyak "fase ke-" kali.

Jika kalian mencari banyak orang yang tertular pada fase ke-5, maka banyak orang yang tertular sama dengan $2^5 = 32$ orang.

Jika banyak orang yang tertular pada fase ke-n dinyatakan dengan m, maka berdasarkan eksplorasi di atas m dapat dinyatakan dalam n sebagai $m(n)$ yaitu:

$$m(n) = 2^n$$

Bentuk 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 dan 2^n ini merupakan bentuk bilangan pangkat. Bilangan berpangkat akan memudahkan kalian untuk menyederhanakan bentuk perkalian berulang. Bilangan berpangkat atau disebut juga eksponen didefinisikan sebagai berikut.

Jika a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor dan ditulis dengan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n faktor}$$

Bilangan berpangkat dapat dinyatakan dengan

$$a^n$$

pangkat: n ; bilangan pokok: a

Berikut adalah beberapa definisi penting yang perlu kalian ketahui.

1. Jika a adalah bilangan real dengan $a \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
2. Jika a adalah bilangan real dengan $a \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{1}{n}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^n = a$
3. Jika a adalah bilangan real dengan $a \neq 0$ dan m,n bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

2. Sifat-sifat Eksponen

Eksplorasi 1.2 Sifat-sifat Eksponen

Perhatikan tabel yang menunjukkan bentuk eksponen 2^n di bawah ini.

Tabel 1.1 Bentuk Eksponen 2^n

2^n	Hasil Perpangkatan
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Sekarang coba kalian amati bentuk eksponen di bawah ini. Selesaikan dan diskusikan dengan teman kelompokmu.

1) $2^2 \bullet 2^3$	4) $\frac{2^8}{6^6}$	7) $(2^3)^3$
2) $2^5 \bullet 2^2$	5) $\frac{2^{10}}{6^3}$	8) $(2^4)^2$
3) $2^3 \bullet 2^7$	6) $\frac{2^6}{6^4}$	9) $(2^2)^5$

Berdasarkan pengamatan di atas, apa yang dapat kalian simpulkan dari sifat-sifat eksponen tersebut?

1. Secara umum apakah bentuk lain dari $a^m \bullet a^n$?
2. Secara umum apakah bentuk lain dari $\frac{a^m}{a^n}$?
3. Secara umum apakah bentuk lain dari $(a^m)^n$?

Itu merupakan sifat-sifat yang berlaku pada eksponen. Berikut sifat-sifat eksponen yang perlu kalian ketahui. Kalian sudah membuktikan sifat 1, 2, dan 3.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, dengan $a \neq 0, m, n$ bilangan bulat
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dengan $a \neq 0, m, n$ bilangan bulat
3. $(a^m)^n = a^{m \times n},$ dengan $a \neq 0, m, n$ bilangan bulat
4. $(ab)^m = a^m \times b^n$ dengan $a, b \neq 0$, dan m bilangan bulat
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ dengan $b \neq 0$, dan m *bilangan bulat*
6. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$ dengan $a>0, \frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{n}$ bilangan rasional dengan $n \neq 0$
7. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ dengan $a>0, \frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{n}$ bilangan rasional dengan $n, q \neq 0$

Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana kalian membuktikan Sifat 4 dan 5? Diskusikan bersama temanmu.

Perhatikan contoh 1 dan 2 berikut.

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\dfrac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{2^5 \times 2^3}{2^2} &= \frac{2^{(5+3)}}{2^2}\\ &= \frac{2^8}{2^2}\\ &= 2^{8-2}\\ &= 2^6\end{aligned}$$

Contoh 2

Sederhanakan bentuk eksponen

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(x^{\frac{4}{3}}\right) &= \left(x^{\frac{2}{3}}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}}\right)\\ &= x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}\\ &= x^{\frac{6}{3}}\\ &= x^2\end{aligned}$$

Latihan 1.1

1. Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
2. Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat

   a. $\left(3^4\right)^2 = 3^p$ b. $b^p.b^5 = b^9$ c. $(3\pi)^p = 27\pi^3$
3. Sederhanakanlah

   a. $\left(\dfrac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3$

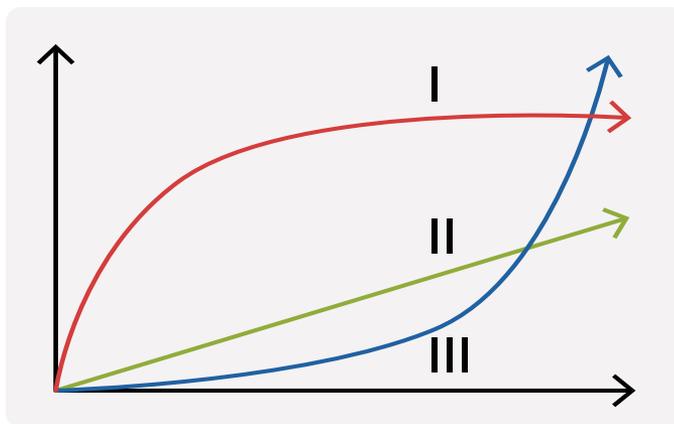
b. $\left(3u^3v^5\right)\left(9u^4v\right)$

c. $\left(\dfrac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^4}\right)^2, n \neq 0,\ r \neq 0$

3. Fungsi Eksponen

Eksplorasi 1.3 Sifat-sifat Eksponen

Seseorang membawa virus dan menulari 3 orang lainnya. Pada fase selanjutnya, setiap orang menulari 3 orang lainnya lagi.

1. Berapakah orang yang akan tertular pada setiap fase selanjutnya?
2. Berapa orang yang akan tertular virus tersebut pada fase ke-20?
3. Manakah dari grafik fungsi berikut ini yang merepresentasikan peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut jika proses penularan terjadi terus-menerus? Mengapa demikian?

4. Fungsi apakah yang tepat menggambarkan penularan tersebut?

Perhatikan Eksplorasi 1.3 di atas.

Pada fase pertama 3 orang tertular dari orang pertama dan kemudian menularkan masing-masing ke 3 orang lainnya. Kemudian 3 orang tersebut menularkan lagi ke masing-masing 3 orang berikutnya, begitu seterusnya.

Tabel 1.2 Penularan Virus di Beberapa Fase

Fase	1	2	3	4	5	6	7
Banyak orang yang tertular	$3=3^1$	$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$	$243=3^5$	$729=3^6$	$2187=3^7$

Kalau kalian perhatikan, untuk menentukan banyaknya orang yang tertular virus tersebut, pola yang muncul adalah 3^x, di mana x adalah fase penyebaran virus. Jika $f(x)$ adalah banyaknya orang yang tertular virus tersebut, sementara x adalah fase penyebaran virus, maka banyaknya orang yang tertular virus tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$f(x) = 3^x$$

$f(x) = 3^x$ adalah salah satu contoh fungsi eksponen.

Definisi Fungsi Eksponen

Sebuah fungsi eksponen dinyatakan dengan

$$f(x) = n \times a^x$$

di mana a adalah bilangan pokok, $a > 0$, $a \neq 1$, n adalah bilangan real tak nol dan x adalah sebarang bilangan real.

Ayo Berpikir Kreatif

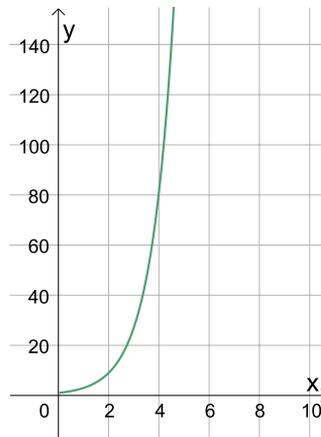
Apakah kalian sudah memahami definisi di atas? Coba diskusikan pertanyaan berikut ini.

1. Bagaimana jika $a = 1$?
2. Bagaimana jika $a = 0$?

Beberapa contoh fungsi eksponen lainnya adalah sebagai berikut. Contoh fungsi eksponen:

1. $f(x) = 4^x$
2. $f(x) = 3^{x+1}$
3. $f(x) = 5^{2x-1}$

Jika kalian perhatikan, perubahan nilai pada fungsi eksponen sangatlah signifikan. Pada **Eksplorasi 1.3** dapat kalian amati bahwa pada fase-fase selanjutnya, semakin banyak orang yang tertular virus tersebut.

Grafik fungsi eksponen pada $f(x) = 3^x$ ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

Gambar 1.3 Grafik Fungsi $f(x) = 3^x$

Fungsi eksponen dibedakan menjadi dua bentuk, yaitu pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial.

Ayo Berpikir Kreatif

Perhatikan ketiga fungsi berikut ini.

$f(x) = 2x$ $\qquad$ $f(x) = 2^x$ $\qquad$ $f(x) = x^2$

1. Gambarlah ketiga grafik fungsi tersebut.
2. Apa yang membedakan ketiga grafik fungsi tersebut?
3. Dari ketiga grafik fungsi tersebut, grafik yang manakah yang paling cepat peningkatannya?

a. Pertumbuhan Eksponen

Kurva di atas adalah salah satu kurva yang menunjukkan pertumbuhan eksponen, di mana tingkat pertumbuhan berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitasnya. Contoh yang lainnya adalah pertumbuhan bakteri di mana pada fase-fase selanjutnya bakteri tentu akan semakin banyak jumlahnya.

Fungsi pertumbuhan eksponen dituliskan dengan:

$$f(x) = a^x \text{ dengan } a > 1$$

Sekarang mari kita lihat beberapa contoh berikut ini.

Contoh 3

Untuk mengamati pertumbuhan suatu bakteri pada inangnya, seorang peneliti mengambil potongan inang yang sudah terinfeksi bakteri tersebut dan mengamatinya selama 5 jam pertama. Pada inang tersebut, terdapat 30 bakteri. Setelah diamati, bakteri tersebut membelah menjadi dua setiap 30 menit.

1. Modelkan fungsi pertumbuhan bakteri pada setiap fase.
2. Gambarkan grafik pertumbuhan bakteri tersebut.
3. Pada jam ke-5 berapa banyak bakteri baru yang tumbuh?

Alternatif Penyelesaian:

1. Pada awal pengamatan, bakteri yang diamati berjumlah 30 sehingga untuk 30 menit berikutnya dapat digambarkan pertumbuhan bakterinya sebagai berikut
   Misalkan x adalah fase pertumbuhan bakteri setiap 30 menit, maka

Fase (30 menit)	0	1	2	3	4	5
Banyak bakteri	30	60	120	240	480	960

   Untuk $x = 0$, banyak bakteri = 30

   Untuk $x = 1$, banyak bakteri = 60

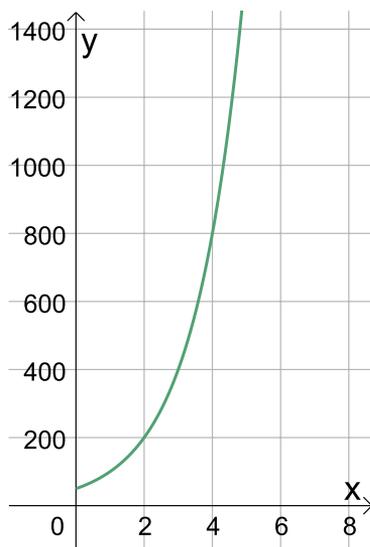
   Untuk $x = 2$, banyak bakteri = 120 = $2^2.30$;

   Untuk $x = 3$, banyak bakteri = 240 = $2^3.30$;

   Untuk $x = 4$, banyak bakteri = 480 = $2^4.30$;

   Pertumbuhan bakteri dapat dimodelkan dengan fungsi eksponen

$$f(x) = 30.(2^x)$$

2. Grafik fungsi eksponen pertumbuhan bakteri $f(x) = 30.(2^x)$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 1.4 Grafik Fungsi $f(x) = 30.(2^x)$

Gunakan aplikasi GeoGebra untuk membantu kalian menggambarkan grafik tersebut. Kunjungi www.geogebra.org

3. Jam ke-5 terjadi pada fase ke-10 (ingat kembali pembelahan terjadi setiap 30 menit), sehingga:

$$\begin{aligned} f(10) &= 30.\left(2^{10}\right) \\ &= 30.(1024) \\ &= 30.720 \end{aligned}$$

Jadi banyak bakteri yang tumbuh pada jam ke-5 atau fase ke-10 adalah 30.720 bakteri.

Ayo Berpikir Kritis

Jika banyak bakteri pada awal pengamatan adalah 50, 100, dan 200, bagaimana kalian memodelkan pertumbuhan bakteri tersebut?

Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan teman kelompok kalian.

Contoh 4

Seorang peneliti mengamati pertumbuhan bakteri selama beberapa jam. Setelah diamati, bakteri tersebut membelah menjadi n bakteri setiap jam. Setelah diamati, jumlah bakteri pada 2 jam pertama adalah 8.000 bakteri. Dua jam kemudian jumlah bakteri sudah mencapai 32.000 bakteri. Berapakah jumlah bakteri setelah 10 jam?

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan x_0 adalah banyaknya bakteri pada waktu $t = 0$.
Jika a adalah banyaknya bakteri setelah pembelahan setiap jam, maka

Untuk $t = 0$, banyak bakteri = x_0;

Untuk $t = 1$, banyak bakteri = $a^1.x_0$;

Untuk $t = 2$, banyak bakteri = $a^2.x_0$;

Untuk $t = 3$, banyak bakteri = $a^3.x_0$;

Untuk $t = 4$, banyak bakteri = $a^4.x_0$;

dan seterusnya.

Kalian harus mencari nilai a terlebih dahulu untuk mengetahui banyak bakteri yang dihasilkan ketika sebuah bakteri membelah dalam 1 jam. Jika banyak bakteri pada 2 jam pertama adalah x_2 dan banyak bakteri pada 2 jam berikutnya (4 jam kemudian) adalah x_4, maka:

$$\begin{aligned}\frac{x_4}{x_2} &= \frac{32000}{8000}\\ \frac{a^4 \cdot x_0}{a^2 \cdot x_0} &= \frac{32000}{8000}\\ a^2 &= 4\\ a &= \sqrt{4}\\ a &= 2\end{aligned}$$

Jadi, setiap 1 jam bakteri akan membelah menjadi dua bakteri.

Selanjutnya kalian akan mencari banyak bakteri di awal yaitu x_0 Kalian bisa menggunakan persamaan $x_2 = a^2 .x_0$ Substitusikan nilai $a = 2$ pada $x_2 = a^2 .x_0$

$$\begin{aligned} x_2 &= a^2 \cdot x_0 \\ 8000 &= 2^2 \cdot x_0 \\ 8000 &= 4x_0 \\ \frac{8000}{4} &= x_0 \\ x_0 &= 2000 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya bakteri mula-mula adalah 2.000 bakteri.

Untuk mencari banyak bakteri pada 10 jam kemudian, maka digunakan persamaan $x_{10} = a^{10}.x_0$. substitusikan nilai $a = 2$ dan x_0 = 2.000 pada $x_{10} = a^{10}.x_0$.

$$\begin{aligned} x_{10} &= a^{10} \cdot x_0 \\ x_{10} &= 2^{10} \cdot 2.000 \\ x_{10} &= 1.024 \cdot 2.000 \\ x_{10} &= 2.048.000 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya bakteri setelah 10 jam adalah 2.048.000 bakteri.

Latihan 1.2

Jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Bakteri E.coli menyebabkan penyakit diare pada manusia. Seorang peneliti mengamati pertumbuhan 50 bakteri ini pada sepotong makanan dan menemukan bahwa bakteri ini membelah menjadi 2 setiap seperempat jam.
   a. Gambarkan tabel dan grafik yang menunjukkan pertumbuhan bakteri ini dari fase 0 sampai fase 5.
   b. Modelkan fungsi yang menggambarkan pertumbuhan bakteri E.coli setiap seperempat jam.
   c. Prediksi berapa banyaknya bakteri setelah 3 dan 4 jam pertama.
2. Pada tahun 2015 kasus positif HIV-AIDS berjumlah sekitar 36 juta jiwa. Jumlah ini meningkat rata-rata 2% setiap tahun dari tahun 2010 hingga 2015. Jika peningkatan kasus positif HIV di tahun-tahun berikutnya diprediksi bertambah secara eksponen pada peningkatan 2% setiap tahun, berapa banyak kasus yang terjadi pada tahun 2020?

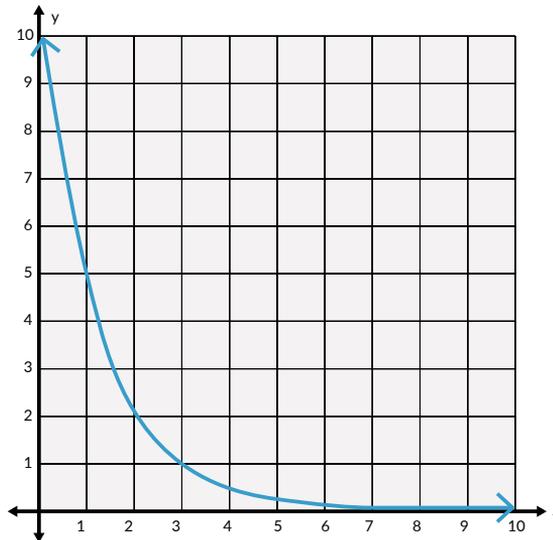
   Sumber: https://pusdatin.kemkes.go.id/ (dengan berbagai penyesuaian)

Buatlah tabel dan modelkan fungsi eksponennya seperti contoh sebelumnya.

Ayo Berpikir Kreatif

Berikan sebuah contoh penerapan pertumbuhan eksponen lainnya.

b. Peluruhan Eksponen

Fungsi eksponen tidak hanya menggambarkan pertumbuhan yang signifikan dari waktu ke waktu. Fungsi eksponen juga menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu. Ini disebut peluruhan eksponen. Perhatikan grafik fungsi peluruhan eksponen di bawah ini. Apa perbedaannya dengan grafik pertumbuhan eksponen? Diskusikan dengan teman kalian.

Gambar 1.5 Grafik Fungsi Peluruhan Eksponen

Fungsi peluruhan eksponen dapat dituliskan sebagai

$f(x) = n \times a^x$, dengan $0 < a < 1$, n bilangan real tak nol, x adalah sebarang bilangan real.

Contoh 5

Obat penahan rasa sakit disuntikkan kepada pasien yang mengalami luka berat akibat kecelakaan. Dosis obat yang disuntikkan adalah 50 mikrogram. Satu jam setelah penyuntikan, setengah dosis tersebut akan luruh dan dikeluarkan dari dalam tubuh. Proses tersebut akan terus berulang setiap jam.

1. Berapa banyak dosis obat yang masih tertinggal di dalam tubuh pasien setelah 1 jam, 2 jam, dan 3 jam?
2. Bagaimana model matematika yang dapat menyatakan peluruhan dosis obat tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

1. Dosis awal = 50 mikrogram

   Misalkan dosis pada x waktu dilambangkan dengan $f(x)$, maka

   $$f(0) = 50$$
   $$f(1) = \frac{1}{2} \times 50 = 25$$
   $$f(2) = \frac{1}{2} \times 25 = 12,5$$
   $$f(3) = \frac{1}{2} \times 12,5 = 6,25$$

   Jadi, dosis pada 1 jam pertama tersisa 25 mikrogram, pada 2 jam pertama tersisa 12,5 mikrogram, dan setelah 3 jam tersisa 6,25 mikrogram.

2. Berdasarkan bagian a, fungsi eksponen yang dapat menyatakan peluruhan dosis obat tersebut dari dalam tubuh pasien pada jam tertentu adalah $f(x) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dengan x adalah waktu yang dibutuhkan obat tersebut untuk meluruh sebanyak setengah dosis dari dosis sebelumnya.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan mengapa fungsi $f(x) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dapat menggambarkan permasalahan di atas.

Ayo Berpikir Kreatif

Prediksilah, berapa jam yang dibutuhkan sehingga dosis obat tersebut masih ada di dalam tubuh pasien kurang dari 0,1 mikrogram.

Latihan 1.3

Jawablah pertanyaan berikut ini.

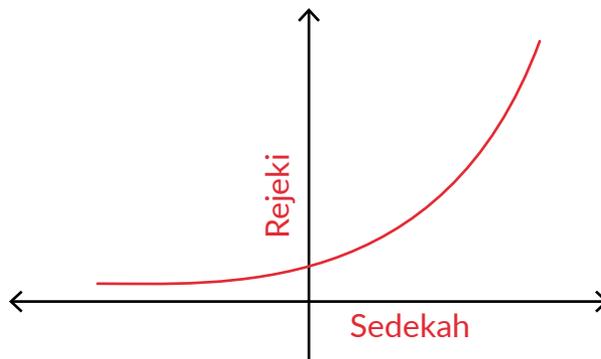
1. Dua ratus mg zat disuntikkan ke dalam tubuh pasien yang menderita penyakit kanker paru-paru. Zat tersebut akan dikeluarkan dari dalam tubuh melalui ginjal setiap jam. Jika setiap 1 jam 50% zat tersebut dikeluarkan dari dalam tubuh pasien, berapa mg zat tersebut yang masih tersisa di dalam tubuh pasien setelah 5 jam?
2. Massa suatu zat radioaktif adalah 0,3 kg pada pukul 10 pagi. Tingkat peluruhan zat radioaktif tersebut adalah 15 % setiap jam. Berapakah jumlah zat radioaktif tersebut 8 jam kemudian?
3. Sebuah bola basket dijatuhkan dari ketinggian 3 meter. Bola tersebut menyentuh tanah dan kemudian melambung kembali setinggi $\frac{3}{5}$ dari tinggi sebelumnya. Bola tersebut terpantul dan melambung kembali dengan ketinggian yang sama sampai akhirnya benar-benar berhenti melambung dan jatuh ke tanah.
   a. Gambarkan grafik fungsi perubahan ketinggian lambungan bola hingga akhirnya menyentuh tanah.

   Hint

   Ambil paling tidak lima lambungan pertama untuk membantu kalian.

   b. Pada lambungan ke berapa, bola akhirnya berhenti melambung?

Penguatan Karakter

Jika kalian perhatikan, makna pertumbuhan eksponen juga bisa kalian temui dalam kehidupan sehari-hari. Coba kalian perhatikan grafik di bawah ini. Semakin banyak kalian berbagi kepada orang lain yang membutuhkan, maka akan semakin banyak rezeki yang akan Tuhan berikan dalam kehidupan kalian.

Gambar 1.6 Grafik Hubungan Sedekah dan Rezeki

Apakah kalian bisa menyebutkan makna lain dari perubahan eksponen yang bisa kalian temukan dalam kehidupan sehari-hari?

4. Bentuk Akar

a. Hubungan Bilangan Pangkat dan Akar

Perhatikan kembali Contoh 5 sebelumnya. Fungsi eksponen yang menyatakan peluruhan dosis obat di dalam tubuh pasien dituliskan dalam fungsi $f(x) = 50(0{,}5)^x$ dengan x adalah waktu yang dibutuhkan obat tersebut untuk meluruh sebanyak setengah dosis dari dosis sebelumnya. Jika kalian ingin mengetahui banyaknya dosis yang meluruh setelah 30 menit, bagaimana cara yang kalian lakukan?

Fungsi untuk permasalahan tersebut adalah $f(x) = 50(0{,}5)^x$

Setelah 30 menit, banyak dosis obat yang meluruh adalah $f\left(\frac{1}{2}\right) = 50\,(0,5)^{\frac{1}{2}}$

Akan mudah bagi kalian untuk menentukan hasil penghitungan dengan pangkat bilangan bulat positif. Sementara bentuk $(0,5)^{\frac{1}{2}}$ tentu menyulitkan untuk menentukan hasil perpangkatannya dengan penghitungan manual.

Bentuk lain dari $(0,5)^{\frac{1}{2}}$ adalah $\sqrt{0,5}$. Bentuk ini disebut bentuk akar. Bentuk akar didefinisikan sebagai berikut.

Untuk setiap bilangan pangkat rasional $\frac{m}{n}$, di mana m dan n adalah bilangan bulat dan $n>0$, didefinisikan

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ atau } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Contoh 6

Sederhanakanlah bentuk $\left(2\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt[3]{x}\right)$ untuk $x > 0$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt[3]{x}\right) &= \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= 2 \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\\ &= 6x^{\frac{3+2}{6}}\\ &= 6x^{\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

Ayo Berpikir Kreatif

Apakah bentuk $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ benar? Jelaskan jawabanmu.

b. Merasionalkan Bentuk Akar

Untuk merasionalkan bentuk akar, maka yang dapat dilakukan adalah dengan mengalikannya dengan bentuk akar sekawannya.

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dilakukan dengan cara mengalikan dengan sekawannya yaitu $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$, sehingga diperoleh:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{c}{a+\sqrt{b}}, \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, dan $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$ dilakukan

dengan mengalikannya dengan sekawannya. Bentuk $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dan $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ adalah sekawan, serta bentuk $a+\sqrt{b}$ dan $a-\sqrt{b}$ juga sekawan.

Ayo Berpikir Kreatif

Coba rasionalkan bentuk-bentuk ini: $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\frac{c}{a+\sqrt{b}}$, dan $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$

Ayo Berdiskusi

Diskusikan cara yang kamu gunakan.

Latihan 1.4

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.

   a. $\left(\frac{8x^5y^{-4}}{16y^{-\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ b. $\left(5\sqrt{x^5}\right)\left(3\sqrt[3]{x}\right)$ c. $\left(\frac{p^5q^{-10}}{p^5q^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}}{p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. Rasionalkan bentuk berikut ini.

   a. $\frac{2}{\sqrt[4]{b^3}}$ b. $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ c. $\frac{m}{\sqrt{m}+n}$

Ayo Berefleksi

Pada subbab ini kalian telah belajar mengenai bilangan eksponen, fungsi eksponen, dan bentuk akar.

1. Apa itu bilangan eksponen?
2. Seperti apa bentuk fungsi eksponen?
3. Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?

Ayo Berpikir Kreatif

Coba berikan contoh penerapan fungsi eksponen lainnya yang ada dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang sudah dibahas pada subbab ini.

B. Logaritma

Ayo Mengingat Kembali

1. Jika a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor dan ditulis dengan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

2. Perhatikan kembali sifat-sifat yang berlaku pada eksponen.

Eksplorasi 1.4 Logaritma

Ayo Bereksplorasi

Sebuah koloni bakteri terdiri atas 2.000 bakteri yang akan membelah diri menjadi dua setiap 1 jam. Pertumbuhan bakteri tersebut mengikuti bentuk fungsi eksponen

$f(x) = 2.000(2^x)$

1. Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 64.000 bakteri?
2. Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri?

Pada Eksplorasi 1.4, untuk menentukan waktu yang dibutuhkan koloni bakteri sampai berjumlah 64.000 bakteri tentu masih mudah.

Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 1.3 Pertumbuhan Koloni Bakteri

Waktu (x)	0	1	2	3	4	5	6
Banyak bakteri	2.000	4.000	8.000	....	....	....	....

Selanjutnya bagaimana menentukan waktu yang dibutuhkan sehingga terdapat 100.000 bakteri?

Setelah memasukkan berbagai nilai x, ternyata waktu yang dibutuhkan bukan berupa bilangan bulat.

Waktu yang terdekat adalah
$x = 5$ di mana banyak bakteri adalah $f(5) = 2.000\left(2^{5}\right) = 64.000$

$x = 6$ di mana banyak bakteri adalah $f(6) = 2.000\left(2^{6}\right) = 128.000$

Dengan demikian, 100.000 bakteri akan muncul antara 5 sampai 6 jam. Atau dengan kata lain, kalian harus menemukan nilai x sehingga berlaku $100.000 = 2.000\ (2^{x})$

Jika nilai $x = 5{,}5$ disubstitusi pada fungsi tersebut, maka diperoleh
$f(5,5) = 2.000\left(2^{5,5}\right)$

$f(5,5) = 2.000\,(45,25)$

$f(5{,}5) = 90.509$

Dalam waktu 5,5 jam sudah terdapat sekitar 90.509 bakteri di koloni tersebut. Dengan demikian, waktu yang dibutuhkan hingga mencapai 100.000 bakteri lebih dari 5,5 jam.

Kegiatan mencoba-coba dapat terus kita lakukan sampai menemukan waktu yang paling tepat. Akan tetapi, tentu hal tersebut menjadi tidak efisien.

Untuk menentukan waktu hingga bakteri berjumlah 100.000, kalian memiliki

$100.000 = 2.000\,(2^{x})$

$50 = 2^{x}$ kedua ruas dibagi dengan 2.000

Dengan kata lain untuk mendapatkan nilai x kalian mencari nilai perpangkatan dua yang hasilnya adalah 50.

Untuk memudahkan perhitungan semacam itu, para matematikawan menemukan sebuah konsep yang membuat perhitungan tersebut menjadi lebih efisien yang disebut dengan *logaritma*. Selanjutnya $50 = 2^{x}$ ditulis dengan $x = {}^{2}\log 50$.

Dahulu para matematikawan pada awalnya menyusun logaritma yang akan memudahkan mereka untuk menentukan nilai suatu logaritma. Sekarang ini kalian bisa menggunakan kalkulator saintifik untuk menentukan nilai logaritma. Logaritma biasanya ditulis dengan *log*.

1. Definisi Logaritma

Misalkan a adalah bilangan positif dengan $0 < a < 1$ atau $a > 1, b > 0$,

$$^{a}\log b = c \text{ jika dan hanya jika } b = a^{c}$$

Di mana,
a adalah bilangan pokok atau basis logaritma
b adalah numerus
c adalah hasil logaritma

Jadi, antara eksponen dan logaritma saling terkait. Logaritma adalah inversi atau kebalikan dari eksponen. Perhatikan tabel di bawah ini.

Tabel 1.4 Contoh Bentuk Eksponen dan Bentuk Logaritma

Bentuk Eksponen	Bentuk Logaritma
$2^{5} = 32$	$^{2}\log 32 = 5$
$3^{2} = 9$	$^{3}\log 9 = 2$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$^{5}\log \frac{1}{25} = -2$
$7^{0} = 1$	$^{7}\log 1 = 0$

Bentuk logaritma yang juga perlu kalian ketahui adalah logaritma dengan basis 10 yang biasa disebut dengan Logaritma Umum. Bentuk logaritma umum ini biasanya juga dapat kalian tulis dengan menghilangkan basis logaritmanya. Bentuk logaritma umum didefinisikan sebagai berikut.

Definisi Logaritma Umum

Logaritma yang memiliki basis 10 disebut dengan logaritma umum dan dituliskan sebagai berikut:

$$^{10}\log a = \log a$$

2. Sifat-sifat Logaritma

Seperti halnya eksponen, logaritma juga memiliki sifat-sifat yang penting untuk kalian ketahui. Sifat-sifat logaritma yang perlu kalian ketahui adalah sebagai berikut.

Misalkan $a > 0$ dan $a \neq 1, b > 0, c > 0, m > 0, m \neq 1,$ di mana a, b, c, m, n adalah bilangan Real, maka berlaku:

1. $^a\log a = 1$
2. $^a\log 1 = 0$
3. $^a\log a^n = n$
4. $^a\log (b \times c) = ^a\log b + ^a\log c$
5. $^a\log \left(\frac{b}{c}\right) = ^a\log b - ^a\log c$
6. $^a\log b^n = n\, ^a\log b$
7. $^a\log b = \frac{^m\log b}{^m\log a} = \frac{1}{^b\log a}$
8. $^a\log b \times ^b\log c = ^a\log c$

Contoh 7

Buktikan sifat logaritma $^a\log (b \times c) = ^a\log\ b + ^a\log\ c$

Alternatif Pembuktian:

Misalkan $^a\log b = m$ dan $^a\log c = n$.
Kalian dapat menuliskan bentuk eksponennya sebagai berikut:
$b = a^m$ dan $c = a^n$
Ingat kembali sifat eksponen $a^m.a^n = a^{m+n}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$b \cdot c = a^{m+n}$$

$^a\log (bc) = m + n$ — Definisi Logaritma

$= ^a\log b + ^a\log c$ — ingat kembali $^a\log b = m$ dan $^a\log c = n$.

Ayo Mencoba

Coba buktikan $^{a}\log(b \times c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$ dengan cara yang lain.

Ayo Berdiskusi

Bagaimana membuktikan sifat-sifat logaritma yang lainnya? Coba diskusikan dengan teman kalian

Contoh 8

Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut ini: $^{2}\log 16 + {}^{2}\log 8$

Alternatif Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\log 16 + {}^{2}\log 8 &= {}^{2}\log(16 \times 8) \\
&= {}^{2}\log 128 \\
&= {}^{2}\log 2^{7} \\
&= 7 \cdot {}^{2}\log 2 \\
&= 7 \cdot 1 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Contoh 9

Arif menabung uangnya di bank sebesar Rp3.000.000,00 dan mendapatkan bunga sebesar 5% per tahun. Berapa lama Arif harus menyimpan uang di bank agar tabungannya tersebut menjadi tiga kali lipat dari tabungan awal?

Alternatif Penyelesaian:

Dimisalkan
M_0 = modal awal
M_t = modal setelah menabung selama t tahun.
i = bunga per tahun

Tabungan awal (M_0) Arif adalah Rp3.000.000,00
Tabungan setelah t tahun (M_t) = Rp9.000.000,00

Dengan mengeksplorasi tabungan awal dan bunga yang diperoleh Arif, kalian bisa menentukan rumus tabungan Arif setelah t tahun. Untuk menentukan total tabungan Arif setelah tahun t, diperoleh rumus penambahan uangnya sebagai $M_t = 3.000.000\ (1 + 0{,}05)^t$

Jika Arif menginginkan tabungan akhirnya menjadi 3 kali lipat, maka berlaku:

$9.000.000 = 3.000.000(1 + 0{,}05)^t$

Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana menentukan $M_t = 3.000.000(1{+}0{,}05)^t$?

Dengan menggunakan sifat-sifat logaritma, kalian bisa menentukan waktu yang dibutuhkan agar tabungan Arif menjadi 3 kali lipat.

$$9.000.000 = 3.000.000(1 + 0{,}05)^t$$
$$\frac{9.000.000}{3.000.000} = (1 + 0,05)^t$$
$$3 = (1 + 0,05)^t$$
$$\log 3 = \log\,(1 + 0,05)^t$$
$$\log 3 = \log 1,05^t$$
$$\log 3 = t \cdot \log 1,05$$
$$t = \frac{\log 3}{\log 1,05}$$
$$t = \frac{0,4771}{0,0212}$$
$$t = 22,5$$

Problem Solving Tips

$^a\log b^n = n \cdot {}^a\log b$

Problem Solving Tips

Gunakan kalkulator atau tabel log

Jadi, Arif membutuhkan waktu 22,5 tahun agar tabungannya menjadi 3 kali lipat.

Latihan 1.5

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.

   a. $^9\log 81$ b. $^2\log 64 - {}^2\log 16$ c. $^4\log 16^{10}$

2. Jika $^5\log 4 = m$, $^4\log 3 = n$, nyatakan $^{12}\log 100$ dalam m dan n.
3. Penduduk kota A pada tahun 2010 sebanyak 300.000 jiwa. Pertumbuhan penduduk kota A rata-rata per tahun adalah 6%. Jika diasumsikan

pertumbuhan penduduk setiap tahun sama, dalam berapa tahun penduduk kota A menjadi 1 juta jiwa?

4. Berapa waktu yang dibutuhkan sehingga uang Dini yang tadinya Rp2.000.000,00 dapat menjadi Rp6.500.000,00 jika dia menabung di suatu bank yang memberinya bunga sebesar 12%?

Ayo Berefleksi

Pada subbab ini kalian telah belajar mengenai logaritma

1. Apa itu logaritma?
2. Apa saja sifat-sifat logaritma?
3. Bagaimana hubungan antara eksponen dan logaritma?
4. Masalah sehari-hari apa saja yang dapat diselesaikan dengan logaritma?

Latihan 1.6

Soal Pemahaman

1. Selesaikanlah:

   a. $\left(\dfrac{3a^{-2}b}{a^2b^5c^{-1}}\right)^{-3}$

   b. $\sqrt[3]{\dfrac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}}$

2. Jika ${}^{a}\log b = 2$, ${}^{c}\log b = 3$ nilai dari $\left({}^{a}\log\,(bc)^3\right)^{\frac{1}{2}}$ adalah....

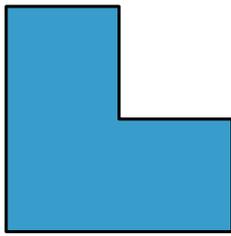
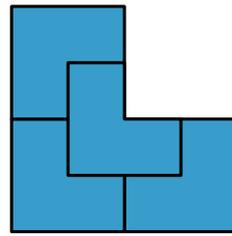
3. Alma menabung di bank sebesar Rp500.000,00 pada awal tahun. Setiap tahun Alma mendapat bunga 8% setahun.

   a. Buatlah tabel yang menunjukkan banyaknya tabungan Alma setiap tahun dalam 5 tahun terakhir.

   b. Berapa jumlah uang yang dimiliki Alma setelah 10 tahun menabung?

   c. Berapa tahun yang dibutuhkan Alma sehingga tabungannya dapat mencapai Rp5.000.000,00?

Soal Aplikasi

4. Sebuah bangun berbentuk seperti di bawah ini. Bangun tersebut kemudian dibagi menjadi 4 bangun yang kongruen.

Tahap 0 Tahap 1

a. Buatlah tabel yang merepresentasikan banyaknya bangun yang kongruen di setiap tahap.

b. Bagaimana model matematika yang tepat untuk menggambarkan permasalahan di atas?

c. Pada tahap ke-12, berapa banyak bangun kongruen yang dapat dibuat?

5. Sita menyusun sebuah fraktal seperti gambar di bawah ini.

Sita membuat sebuah pola tertentu sehingga setiap tahap jumlah segmen garis yang dihasilkan semakin banyak walaupun dengan ukuran yang lebih kecil. Sita terus melanjutkan fraktal tersebut dengan menghasilkan lebih banyak segmen garis pada tahap-tahap selanjutnya dengan pola yang sama.

a. Buatlah sebuah tabel yang menunjukkan peningkatan jumlah segmen garis pada fraktal yang dibuat oleh Sita.

b. Berapa banyak segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama?

6. Rini mengamati bahwa penjualan tas kulit yang diproduksinya mendapatkan hasil penjualan terbesar pada bulan pertama produk tersebut diperjualbelikan. Setelah Rini amati, penjualan tas miliknya pada bulan kedua sebesar $\frac{3}{4}$ dari penjualan tas pada bulan pertama. Demikian pula pada bulan ketiga, penjualan tas hanya $\frac{3}{4}$ dari bulan kedua. Hal tersebut ternyata berlangsung sampai beberapa bulan kemudian.

a. Jika Rini menjual 500 buah tas kulit pada bulan pertama, berapa banyak tas yang terjual pada bulan kedua dan ketiga?

b. Berapa prediksi penjualan pada bulan ke-10?

c. Pada bulan ke berapakah prediksi penjualan akan kurang dari 10 tas saja?

7. Magnitudo atau besar gempa bumi dengan intensitas I biasanya dinyatakan dalam Skala Richter dengan rumus:

   Di mana I adalah intensitas gempa tersebut dan I_0 adalah intensitas gempa yang tidak terasa atau boleh dikatakan 0.

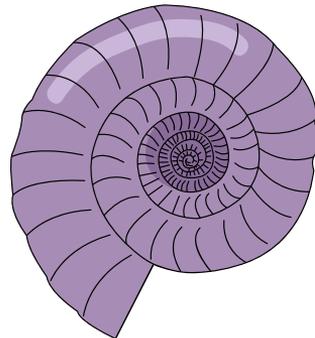
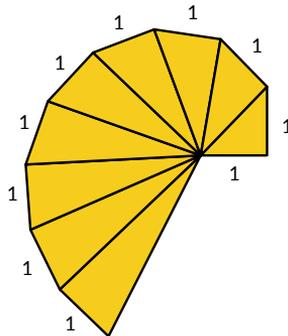
$$M = \log \frac{I}{I_0}$$

   Gempa Mamuju yang terjadi pada awal tahun 2021 memiliki intensitas gempa hingga $5.011.872 I_0$.

   a. Berapakah magnitudo gempa tersebut dalam Skala Richter?
   b. Gempa susulan masih sering terjadi di Mamuju setelah gempa besar tersebut. Jika gempa susulan terjadi dengan magnitudo 5,9 SR, berapakah intensitas gempa tersebut?

Soal Penalaran

8. Cangkang kerang merupakan salah satu contoh bentuk matematika yang ada di alam.

   Perhatikan cangkang kerang berikut ini. Setiap ruang cangkang memiliki bentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi luarnya adalah 1 cm. Bagaimana panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke-n?

9. Tanpa perlu menentukan hasil perpangkatannya, berapakah bilangan satuan dari 7^{123}?

Perhatikan pola bilangan satuan pada hasil setiap perpangkatannya.

10. Sebuah filter cahaya masih dapat ditembus oleh cahaya sebesar 60%. Berapa banyak filter cahaya yang dibutuhkan agar intensitas cahayanya menjadi kurang dari 5% dari intensitas cahaya di awal?

Refleksi

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang eksponen dan logaritma serta bagaimana hubungan antara eksponen dan logaritma.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.
3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?
4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari.

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah
   a. $\left(\frac{x^{-5}y^{4}}{xy^{3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^{7}y^{-3}}{x^{-4}y^{6}}\right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$
   b. $\frac{\left(m^{10}n^{-2}\right)^{3}\left(m^{5}n^{-5}\right)^{3}}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$
   c. $\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0$
   d. $\log\left(\frac{t+6}{36-t^{2}}\right)$
2. Sebuah koloni bakteri terdiri atas 500 bakteri yang akan membelah diri menjadi dua setiap 1 jam.
   a. Tentukan fungsi yang menyatakan hubungan antara banyak bakteri setelah jam tertentu.
   b. Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 5.000 bakteri?
   c. Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri?

3. Sebuah bola basket dijatuhkan dari ketinggian 5 meter. Bola tersebut menyentuh tanah dan kemudian melambung kembali setinggi $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Bola tersebut terpantul dan melambung kembali dengan ketinggian yang sama sampai akhirnya bola benar-benar berhenti melambung dan jatuh ke tanah.
   a. Berapa ketinggian bola tersebut pada lambungan ke-5?
   b. Pada lambungan ke berapa, bola akhirnya berhenti melambung?
4. Dina menabung uang di bank sebesar Rp2.500.000,00 dan mendapatkan bunga sebesar 10% per tahun.
   a. Berapa banyak tabungan Dina pada 5 tahun pertama?
   b. Berapa lama Dina harus menyimpan uang di bank agar tabungannya tersebut menjadi dua kali lipat dari tabungan awalnya?

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab
2

Barisan dan Deret

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri;
2. menentukan suku ke-n dan beda dari barisan aritmetika;
3. menentukan suku ke-n dan rasio dari barisan geometri;
4. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri;
5. menentukan jumlah suku ke-n dari deret aritmetika dan deret geometri;
6. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri;
7. menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga;
8. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.

Barisan dan deret sangat erat kaitannya dengan konsep pola bilangan yang telah kalian pelajari pada tingkat SMP. Penerapan barisan dan deret sangat mudah ditemui dalam kehidupan sehari-hari.

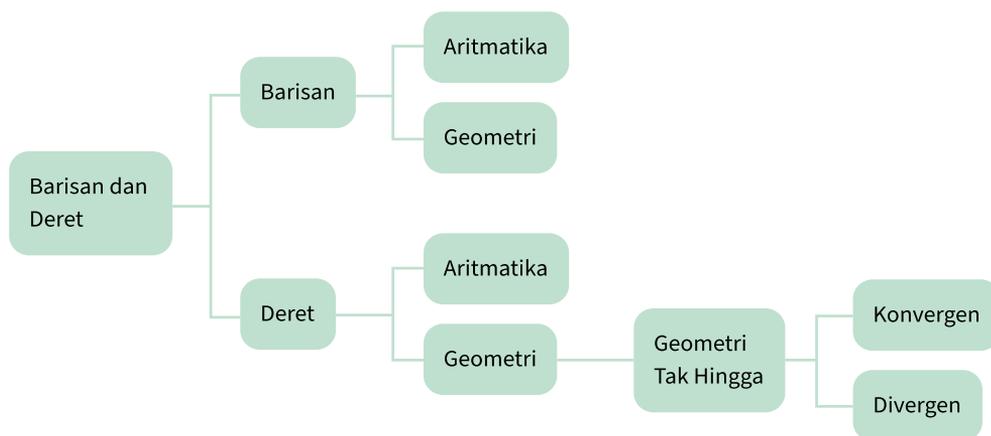
Seperti yang ada di halaman bab pembuka, konsep barisan dan deret terkait dengan menghitung susunan kursi dengan banyaknya kursi yang berbeda di tiap barisnya. Kalian dapat menentukan banyak objek yang disusun dengan pola piramida di mana objek tersebut dapat bertambah atau berkurang secara konstan. Kalian juga dapat menentukan panjang lintasan dari bola yang dipantulkan.

Pertanyaan Pemantik

1. Apakah barisan bilangan merupakan barisan aritmetika atau barisan geometri?
2. Apa perbedaan barisan dan deret?
3. Bagaimana menentukan suku ke-n dari suatu barisan?
4. Bagaimana menentukan rumus Un dari suatu bilangan?
5. Apakah perbedaan deret aritmetika atau deret geometri?
6. Bagaimana menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret?
7. Bagaimana menentukan jumlah deret geometri tak hingga?

Kata Kunci

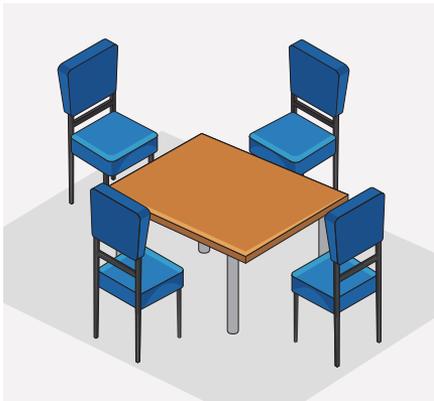
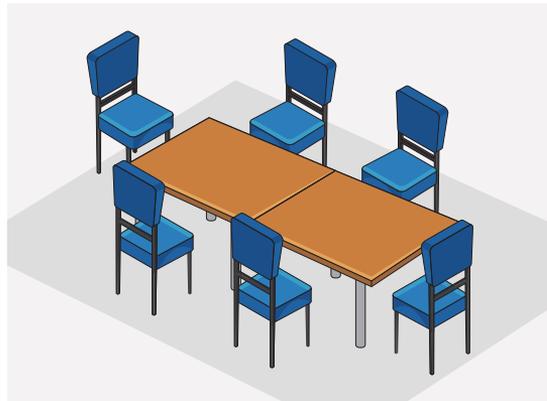
Barisan aritmetika, barisan geometri, deret aritmetika, deret geometri, deret geometri tak hingga

Peta Konsep

Ayo Mengingat Kembali

- Pola bilangan adalah susunan bilangan yang membentuk pola tertentu.
- Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1.
- Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2.
- Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3.
- Suku ke-n dilambangkan dengan U_n.

Eksplorasi 2.1 Meja Segi Empat

Ayo Bereksplorasi

Ayo bandingkan banyak meja dan kursi pada kedua gambar di bawah ini. Pada Gambar 2.1, terdapat satu meja berbentuk segiempat yang dilengkapi empat kursi. Jika dua meja disatukan, maka dapat dilengkapi dengan 6 kursi (Gambar 2.2)

Gambar 2.1 Meja Segi Empat dengan Empat Kursi

Gambar 2.2 Dua Meja Segi Empat Disatukan

Ayo Berdiskusi

Jawablah pertanyaan berikut dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

1. Berapa orang yang dapat duduk di kursi dengan sejumlah meja yang disatukan? Ayo berkolaborasi dengan temanmu dalam mengisi tabel 2.1 untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi

Banyak meja	1	2	3	4	5	6
Banyak kursi	4	6	...	...	...	...

2. Jika terdapat 20 orang yang akan makan bersama dalam satu meja, maka berapa meja yang perlu disatukan? Bagaimana kalian mengetahuinya? Jelaskan jawabanmu.

A. Barisan

Tabel 2.1 menampilkan pola bilangan: 4, 6, 8, 10, ….
Jika diamati lebih teliti, pola bilangan di atas disusun berdasarkan aturan tertentu.
Pola bilangan yang demikian disebut dengan **barisan bilangan.**
Terdiri dari berapa suku barisan bilangan tersebut?

- Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1= ...
- Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2= ...
- Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3= ...
- Suku ke-4 dilambangkan dengan U_4= ...
- Suku ke-n dilambangkan dengan U_n

Sehingga, barisan bilangan dapat dinyatakan dalam **bentuk umum**, yaitu
$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, U_n.$

1. Barisan Aritmatika

- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan pada Tabel 2.1?
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?

- Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

  $U_2 - U_1 = \ldots - \ldots = \ldots$

  $U_3 - U_2 = \ldots - \ldots = \ldots$

  $U_4 - U_3 = \ldots - \ldots = \ldots$

- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

Suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA. Beda pada barisan aritmetika dilambangkan dengan b.

Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari beda dapat dilakukan dengan cara mengurangkan dua suku yang berurutan sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$b = U_2 - U_1$

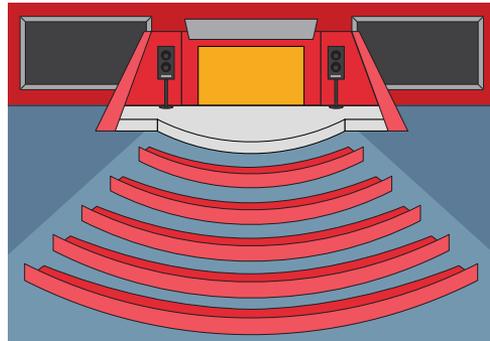
$b = U_3 - U_2$

$b = U_4 - U_3$ dan seterusnya.

Jadi, beda pada barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan $b = U_n - U_{(n-1)}$

Eksplorasi 2.2 Gedung Pertunjukan Seni

Ayo cermati banyak kursi di tiap baris pada gedung pertunjukkan seni yang tampak pada **Gambar 2.3:**

Baris ke-1 = 20
Baris ke-2 = 24
Baris ke-3 = 28
Baris ke-4 = 32
Baris ke-5 = 36

Gambar 2.3 Gedung Pertunjukan Seni

Berapakah jumlah kursi pada bariske-15?

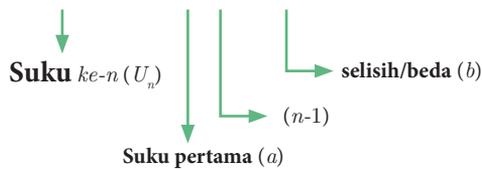
Untuk menentukan banyak kursi pada baris ke-15, sebelumnya kalian amati terlebih dahulu banyak kursi di tiap baris.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris?
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = 24 = 20+ ... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)

  = 20 + (… × …)
- Baris ke-3 = 28 = 20 + ... + ... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)

  = 20 + (… × …)

- Baris ke-4 = 32 = 20 + ... +... +... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
  = 20 + (… × …)
- Baris ke-5 = 36 = 20 + ... + ... + ... +... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
  = 20 + (… × …)
- Jadi, pada baris ke-15 = 20 ditambah … sebanyak …. kali
  = 20 + (… × …) = ...

Baris ke-15 = 20 + (… × …) = ...

Jadi, rumus umum menentukan suku *ke-n* pada barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)\ b$$

Keterangan:

U_n = **suku** *ke-n* a = **suku pertama** n = **nomor suku** b = **beda**

Contoh:

1. Diketahui suatu barisan aritmetika, suku *ke*-3 = 9, suku *ke*-6 = 18. Tentukan rumus suku *ke-n*.

   Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} U_3 = a + 2b &= 9 \\ U_6 = a + 5b &= 18 \\ \hline -3b &= -9 \\ b &= \frac{-9}{-3} \\ b &= 3 \\ a + 2b &= 9 \\ a + 2(3) &= 9 \\ a + 6 &= 9 \\ a &= 9 - 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Rumus suku ke-n :

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$U_n = 3 + (n-1)3$$
$$= 3 + 3n - 3$$
$$U_n = 3n$$

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $U_n = 3_n$

2. Rudi menabung di bank dengan selisih kenaikan nominal uang yang ditabung antarbulan tetap. Jika pada bulan ke-5, nominal uang yang ditabung Rp70.000,00 dan pada bulan ke-9 Rudi menabung sebesar Rp90.000,00.
   a. Berapa rupiah selisih nominal uang yang ditabung antarbulan?
   b. Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya?

   Alternatif Penyelesaian:

$$U_5 = 70.000$$
$$a + (5-1)b = 70.000$$
$$a + 4b = 70.000 \text{ ... (persamaan 1)}$$
$$U_9 = 90.000$$
$$a + (9-1)b = 90.000$$
$$a + 8b = 90.000 \text{ ... (persamaan 2)}$$

Eliminasi Persamaan 1 dan 2

$$a + 8b = 90.000$$
$$a + 4b = 70.000 \; -$$
$$4b = 20.000$$
$$b = 5.000$$

b adalah beda atau selisih.

Jadi, selisih nominal uang yang ditabung Rudi antarbulan adalah Rp5.000,00.

Selanjutnya, menentukan uang yang ditabung Rudi pertama kali, yaitu menentukan suku pertama yang dilambangkan dengan a dengan bantuan nilai b (beda) yang telah diketahui.

Gunakan persamaan 1, lalu substitusi nilai b (beda) yang telah diperoleh.

$$a + 4b = 70.000$$

$$a + 4(5.000) = 70.000$$

$$a + 20.000 = 70.000$$

$$a = 70.000 - 20.000$$

$$a = 50.000$$

a adalah suku pertama.

Jadi, uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya adalah sebesar Rp50.000,00.

Penjelasan di atas menggunakan Persamaan 1 untuk menentukan suku pertama. Bagaimana jika menggunakan Persamaan 2? Apakah hasilnya akan sama?

Latihan 2.1

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.
   a. 8, 5, 2, -1, …
   b. 2, 3, 5, 8,
   c. -15, -11, -7, …
   d. …10, 8, 4, -2, …

   Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.
   - Apakah barisan di atas barisan aritmetika?
   - Jika iya, berapa beda dari barisan tersebut? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
   - Jika tidak, maka aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
2. Tentukan suku ke-50 dari barisan berikut: 5, –2, –9, –16, …

   Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.
   - Berapa beda pada barisan tersebut?
   - $U_n = a + (n - 1)b$

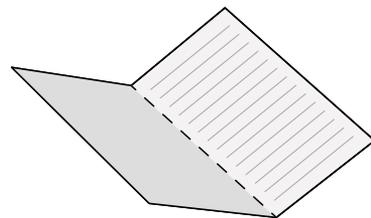
   Maka, suku ke $-\ 50 = U_{50} = \cdots$

3. Jika diketahui barisan aritmetika dengan suku ke - 3 $= -4\frac{1}{2}$ dan suku ke - $8 = -2$. Tentukan suku pertama, beda, serta rumus suku ke - n dari barisan tersebut.

Tahap penyelesaian soal nomor 3 dapat dilihat pada contoh soal 1 dan 2.

2. Barisan Geometri

Eksplorasi 2.3 Melipat kertas

Siapkan kertas berbentuk persegi panjang, lalu ayo bereksplorasi melipat kertas beberapa kali. Jika kertas tersebut dilipat sebanyak 1 kali seperti pada Gambar 2.4, maka kertas akan terbagi menjadi 2 bagian sama besar. Lanjutkan melipat kertas sebanyak beberapa kali, lalu tuliskan jumlah bagian sama besar yang terbentuk pada Tabel 2.2.

Gambar 2.4 Kertas Dilipat Satu Kali

Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk

Jumlah melipat kertas	1 kali	2 kali	3 kali	4 kali
Banyaknya bagian sama besar yang terbentuk	2 bagian	... bagian	... bagian	... bagian

Ayo Berpikir Kreatif

Temukan cara melipat kertas yang berbeda. Bagaimana dengan jumlah bagian sama besar yang terbentuk? Apakah sama dengan yang ada pada tabel? Jelaskan.

- Apakah banyaknya bagian yang sama besar pada lipatan kertas membentuk barisan bilangan?
- Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
- Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?

- Ayo amati rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

- Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

Suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN GEOMETRI. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r. Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari rasio dapat dengan membagi dua suku yang berurutan. Dengan demikian, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$r = \frac{U_2}{U_1}$$

$$r = \frac{U_3}{U_2}$$

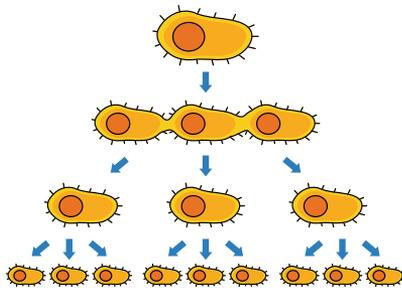
$$r = \frac{U_4}{U_3} \quad \text{dan Seterusnya}$$

Jadi, rasio pada barisan geometri dapat dinyatakan dengan

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri

Ayo Bereksplorasi

Bakteri merupakan makhluk hidup yang berkembang biak dengan cara membelah diri. Dalam waktu dua jam, satu sel bakteri membelah diri menjadi 3 bagian seperti pada Gambar 2.5. Ayo mencari jumlah bakteri setelah 20 jam, jika jumlah awal adalah 2 sel bakteri!

Gambar 2.5 Pembelahan pada Bakteri

Untuk menentukan jumlah sel bakteri setelah 20 jam, kalian harus melengkapi pernyataan di bawah ini.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah ….
- Tiap dua jam, membelah menjadi 3, maka rasio pada barisan di atas adalah ….

Dalam 20 jam, terjadi pembelahan sebanyak 20 jam : 2 jam = … kali → $n = 10$.

$U_{\dots}$ = …

U_1 = 2

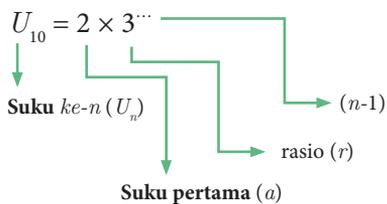
U_2 = 2 ×… (2 dikali 3 sebanyak … kali) = 2 × $3^{\dots}$

U_3 = 2 × … × … (2 dikali 3 sebanyak … kali) = 2 × $3^{\dots}$

U_4 = 2 × … × … × … (2 dikali 3 sebanyak … kali) = 2 × $3^{\dots}$

U_5 = 2 ×… ×… ×… × … (2 dikali 3 sebanyak … kali) = 2 × $3^{\dots}$

U_{10} = 2 dikali 3 sebanyak … kali

U_{10} = 2 × $3^{\dots}$

Jadi, rumus umum menentukan suku *ke-n* pada barisan geometri adalah:

$$U_n = a.r^{n-1}$$

Keterangan:

U_n = suku *ke-n* a = suku pertama n = nomor suku r = rasio

Contoh:

1. Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 4 dan suku ke-4 adalah 108. Tentukan rasio dari barisan tersebut.

   Alternatif penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
a &= 4 \\
U_4 &= 108 \\
a \cdot r^{4-1} &= 108 \quad (\textit{substitusi nilai } a) \\
4 \cdot r^3 &= 108 \\
r^3 &= \frac{108}{4} \\
&= 27 \\
r &= \sqrt[3]{27} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Jadi, rasio barisan geometri tersebut adalah 3.

2. Seutas tali dibagi menjadi 5 bagian dengan ukuran panjang membentuk suatu barisan geometri. Jika tali yang paling pendek adalah 16 cm dan tali yang paling panjang adalah 81 cm, maka tentukan panjang tali pada potongan ketiga.

Alternatif penyelesaian:

Tali yang paling pendek : $a = 16$
Tali yang paling panjang : $U_5 = 81$
$U_3 = \cdots$

Kalian harus menentukan rasio terlebih dahulu.

$$
\begin{aligned}
U_5 &= 81 \\
a \cdot r^{(5-1)} &= 81 \\
a \cdot r^4 &= 81 \quad (\textit{substitusi nilai } a) \\
(16) \cdot r^4 &= 81 \\
r^4 &= \frac{81}{16} \\
r &= \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \\
r &= \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} \\
r &= \frac{3}{2} \\
U_3 &= a \cdot r^{(3-1)} \\
U_3 &= 16 \cdot r^{(2)} \\
U_3 &= 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
U_3 &= 16 \cdot \frac{9}{4} \\
U_3 &= 36
\end{aligned}
$$

Hint

Pada soal mengenai barisan geometri, dapat juga memanfaatkan konsep sifat bilangan eksponen.

Jadi, panjang tali pada potongan ketiga adalah 36 cm.

Latihan 2.2

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.

   a. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots, \ldots$

   b. 25, 5, 1, … , …

   c. 2, 2, 4, 12, …

   d. 3, 3, 3, 3, …

   Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

   - Apakah barisan di atas merupakan barisan geometri atau aritmetika? Bagaimana kalian mengetahuinya? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
   - Jika bukan keduanya, maka aturan apa yang ada pada barisan bilangan tersebut? Ayo diskusikan dengan teman kelompokmu.

2. Tentukan suku ke-10 dari barisan 64, 32, 16, 8, ….

   Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

   - Berapa rasio pada barisan tersebut?
   - $U_n = ar^{n-1}$

   Maka, suku ke-10 = U_{10} = … … … … …

3. Jika diketahui barisan geometri dengan suku ke-2 = 80 dan suku ke-6 = 5.

   Tentukan tiga suku pertama dari barisan geometri tersebut.

Ayo Berefleksi

Pada subbab 2.1, kalian telah belajar mengenai barisan aritmetika dan geometri.

1. Apa perbedaan antara barisan aritmetika dan geometri?
2. Bagaimana kalian mengetahui suatu barisan merupakan barisan aritmetika atau geometri?

Ayo Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi barisan bilangan dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang telah dibahas pada subbab 2.1.

Ayo Berpikir Kritis

Seorang teman kalian mengatakan bahwa jika rasio pada barisan geometri berupa bilangan bulat/bilangan pecahan positif, maka barisan geometri tersebut terdiri dari bilangan bulat/pecahan positif. Dan apabila rasionya bilangan bulat/pecahan negatif, maka barisan geometri tersebut terdiri dari bilangan bulat/pecahan negatif. Setujukah kalian dengan pendapatnya? Jelaskan.

B. Deret

Ayo Mengingat Kembali

Barisan bilangan, terdiri atas barisan aritmetika dan barisan geometri.

- Beda pada barisan aritmetika dinyatakan dengan $b = U_n - U_{n-1}$
- Suku $ke\text{-}n$ barisan aritmetika dinyatakan dengan $U_n = a + (n-1)b$.
- Rasio pada barisan geometri dinyatakan dengan $r = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$.
- Suku $ke\text{-}n$ barisan geometri dinyatakan dengan $U_n = a \cdot r^{n-1}$

Eksplorasi 2.5: Jabat Tangan

Ayo Bereksplorasi

Ayo bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan dengan beberapa teman yang ada di kelompokmu.

Gambar 2.6 Siswa SMA Saling Berjabat Tangan

Ayo Berdiskusi

Setelah itu, jawablah pertanyaan berikut dengan berkolaborasi bersama anggota kelompok.

1. Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? ………………..
2. Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? ………………..

3. Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? ………………..
4. Berapa total siswa dalam kelompokmu, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi? Bagaimana kalian mengetahuinya? ………………..

Ayo Berpikir Kritis

Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Dari Eksplorasi 2.5, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

Banyaknya orang yang hadir	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
Dua orang	1	1
Tiga orang	3	1 + 2
Empat orang	..	1 + … + …
Lima orang	…	1 + … + … + …

- Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan?

Bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan.
Jadi, **deret bilangan adalah jumlah suku-suku penyusun barisan bilangan**.
Deret bilangan, terdiri dari deret aritmetika dan deret geometri.

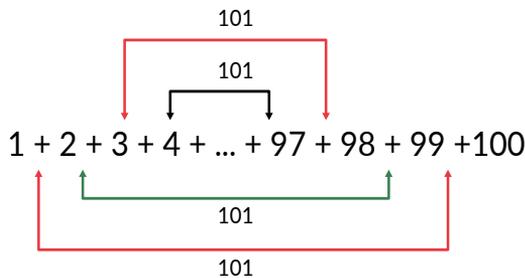
1. Deret Aritmetika

Gambar 2.7
CARL FRIEDRICH GAUSS
Sumber: shorturl.at/auOW0

Tahukah Kalian?

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan Jerman yang telah menunjukkan bakatnya sejak kecil. Ketika duduk di kelas 4 SD, guru matematikanya memberikan soal berupa penjumlahan bilangan $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \ldots \ldots + 98 + 99 + 100 = \cdots$

Tidak membutuhkan waktu yang lama, Gauss yang saat itu masih berusia 10 tahun langsung menjawab "5050".

Berikut cara Gauss menyelesaikan penjumlahan bilangan tersebut.

Ia mengelompokkan suku-suku pada deret tersebut sehingga memiliki nilai yang sama ketika dijumlahkan.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+98+99+100 &= (1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51) \\ &= \underbrace{101+101+\cdots+101}_{50\times} \\ &= 50\times 101 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

Sekarang, ayo cermati kembali deret bilangan di atas.

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 98 + 99 + 100 = \cdots$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan?
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas?

Deret aritmetika adalah suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika.

Dari barisan aritmetika: $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots\ldots\ldots, Un$.
Dapat dibentuk deret aritmetika: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots\ldots\ldots + U_{10}$

$$\begin{aligned} U_1 &= a & U_6 &= a+5b \\ U_2 &= a+b & U_7 &= a+6b \\ U_3 &= a+2b & U_8 &= a+7b \\ U_4 &= a+3b & U_9 &= a+8b \\ U_5 &= a+4b & U_{10} &= a+9b \end{aligned}$$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika: S_4

$$\begin{aligned} S_4 &= U_1+U_2+U_3+U_4 \\ &= a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b) \\ &= 4a+6b \\ &= 2(2a+3b) \\ S_4 &= \frac{4}{2}(2a+(4-1)b) \end{aligned}$$

Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika: S_{10}

$$\begin{aligned} S_{10} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{10} \\ &= a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + (a+4b) + (a+5b) \\ &\quad + (a+6b) + (a+7b) + (a+8b) + (a+9b) \\ &= 10a + 45b \\ &= 5(2a+9b) \\ S_{10} &= \frac{10}{2}(2a + (10-1)b) \end{aligned}$$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika $S_4 = \frac{4}{2}(2a + (4-1)b)$	Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika $S_{10} = \frac{10}{2}(2a + (10-1)b)$

Dari kedua contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa rumus Jumlah n suku pertama deret aritmetika:

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \\ &= a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a+(n-1)b) \end{aligned}$$

Penjumlahan deret aritmetika dibalik dari U_1 menuju U_n menjadi U_n menuju U_1

$$\begin{aligned} S_n &= (a+(n-1)b) + (a+(n-2)b) + \cdots + (a+b) + a \\ S_n &= a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a+(n-2)b) + (a+(n-1)b) \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(2a+(n-1)b) + (2a+(n-1)b) + \cdots + (2a+(n-1)b)}_{n\times} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= n\,(2a+(n-1)b) \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a+(n-1)b) \\ S_n &= \frac{n}{2}(a+[a+(n-1)b]) \\ S_n &= \frac{n}{2}(a+U_n) \end{aligned}$$

$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$ Karena, $U_n = a + (n-1)b$

$S_n = \frac{n}{2}(a+U_n)$

Rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \textbf{ atau } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Keterangan: S_n = **jumlah deret sebanyak n suku pertama**

a = **suku pertama**

b = **beda**

n = **banyaknya suku**

Dengan rumus di atas, ayo hitunglah berapa jumlah deret bilangan

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots \ldots + 98 + 99 + 100 = \cdots$

Apakah hasilnya sama dengan penghitungan Gauss?

Contoh:

Diketahui deret: 13 + 16 + 19 + 22 + ……

Jumlah 30 suku pertama deret tersebut adalah ……

Alternatif penyelesaian:

Suku pertama atau $a = 13$

$b = 3$

$n = 30$

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{30}{2}[2(13) + (30-1)3] \\ &= 15(26 + 29 \cdot 3) \\ &= 15(26 + 87) \\ &= 15 \cdot 113 \\ &= 1.695 \end{aligned}$$

2. Deret Geometri

Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19

Di suatu kota tercatat peningkatan yang signifikan dari jumlah pasien yang terinfeksi Covid-19. Berikut data yang dihimpun dari Gugus Covid-19 kota tersebut.

Tabel 2.4 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19 dalam Waktu 5 Bulan

Bulan	Januari 2020	Februari 2020	Maret 2020	April 2020	Mei 2020
Jumlah pasien	4	12	36	108	324

Jawablah pertanyaan di bawah ini terkait data pada tabel 2.4.

- Apakah jumlah pasien membentuk barisan bilangan?
- Berapa beda atau rasio dari barisan di atas?
- Terdiri dari berapa suku barisan tersebut?

Ayo Bekerja Sama

Ayo cermati jumlah suku-suku deret geometri dengan melengkapi Tabel 2.5 melalui data yang ada pada Tabel 2.4 bersama teman kelompokmu.

Tabel 2.5 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri

	1	2	3
S_2 : jumlah pasien dua bulan pertama	$S_2 = 4 + 12 = ...$	$S_2 = \frac{36-4}{3-1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r-1}$
S_3 : jumlah pasien tiga bulan pertama	$S_3 = ... + ... + ...$ $= ...$	$S_3 = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_3 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r-1}$
S_4 : jumlah pasien empat bulan pertama	$S_4 = ... + ... + ... +$ $... = ...$	$S_4 = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_4 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r-1}$

Dari kolom nomor 3 diperoleh:

$$S_n = \frac{U_{n+1} - U_1}{r-1}$$
$$= \frac{ar^{(n+1)-1} - a}{r-1}$$
$$= \frac{ar^n - a}{r-1}$$
$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

Sehingga, rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret geometri adalah:

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}, \textbf{ untuk } r \neq 1 \text{ dan } r > 1.$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}, \textbf{ untuk } r \neq 1 \text{ dan } r < 1.$$

Keterangan: S_n = **jumlah deret sebanyak n suku pertama**
a = **suku pertama**
r = **rasio**
n = **banyaknya suku**

Contoh:

Hasil produksi sebuah perusahaan sepeda pada tahun 2020 meningkat setiap bulannya dan membentuk barisan geometri. Produksi pada bulan Januari sebanyak 120 unit. Pada bulan April, hasil produksi mencapai 3.240 unit. Berapakah total hasil produksi sepeda hingga bulan Mei?

Alternatif penyelesaian:

Hasil produksi Januari: $U_1 = a = 120$
Hasil produksi April: $U_1 = 3.240$

Total hasil produksi hingga bulan Mei: S_5
Sebelum menentukan S_5, harus dicari ratio (r) terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}
a &= 120 \\
U_4 &= 3.240 \\
a \cdot r^3 &= 3.240 \\
120 \cdot r^3 &= 3.240 \qquad \text{(substitusi nilai } a\text{)} \\
r^3 &= \frac{3.240}{120} \\
&= 27 \\
r &= \sqrt[3]{27} \\
&= 3 \\
S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\
S_5 &= \frac{120(3^5 - 1)}{3 - 1} \\
&= \frac{120(243 - 1)}{2} \\
&= 60 \cdot 242 \\
&= 14.520
\end{aligned}$$

Jadi, total hasil produksi sepeda hingga bulan Mei adalah sebanyak 14.520 unit.

Latihan 2.3

1. Tentukanlah jumlah bilangan kelipatan 4 di antara bilangan 10 hingga 100.

   Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

   - Sebelum menentukan jumlah deret bilangan, kalian harus menentukan terlebih dahulu jumlah Tuliskan terlebih dahulu bilangan kelipatan 4 dari 10 hingga 100:
   -

   - Suku terakhir dari deret bilangan tersebut adalah ………...
   - Suku terakhir: $U_n = a + (n - 1)b$
   - Selanjutnya, menentukan S_5 dengan nilai n yang telah diketahui sebelumnya.
   - Jadi, jumlah bilangan kelipatan 4 di antara bilangan 10 hingga 100 adalah ……………

Untuk mengetahui banyaknya suku pada deret tersebut, kalian harus mengetahui suku pertama, beda dan banyak suku terlebih dahulu.

2. Suku pertama dan rasio dari suatu deret geometri berturut-turut adalah 9 dan 3. Tentukan banyak suku jika diketahui jumlah deret bilangan tersebut adalah 9.837.

   Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

   - Dari soal, diketahui:

     $a = \cdots$ $\qquad r = \cdots$ $\qquad S_n = \cdots$
   - Dengan tiga informasi di atas, maka dapat ditentukan $n = \cdots$

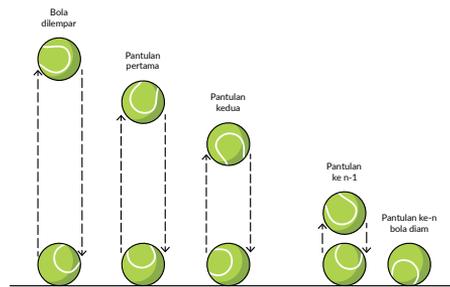
3. Diketahui deret geometri berikut ini: $\frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + \ldots + Y = \frac{762}{4}$ Tentukan nilai Y.

   Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 3.

   - Dengan nilai a ,r dan S_n yang telah terdapat pada soal, kalian akan mendapatkan nilai n.
   - Setelah memperoleh nilai n, kalian dapat menentukan nilai Y.

3. Deret Geometri Tak Hingga

Eksplorasi 2.7 Panjang Lintasan Bola

Bola tenis dilemparkan ke atas setinggi 1 m. Bola tersebut akan terus memantul sampai akhirnya berhenti. Setelah dicermati, setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Kira-kira berapa panjang lintasan bola dari awal memantul sampai berhenti? Ayo bereksplorasi dengan melakukan percobaan melempar bola bersama teman kelompokmu, lalu jawablah pertanyaan di bawah ini.

Gambar 2.8 Lintasan Bola

- Menurutmu, apakah tinggi pantulan bola pada permasalahan di atas membentuk deret geometri? Bagaimana kalian mengetahuinya?
- Setelah melakukan percobaan, apakah kalian mengetahui dengan pasti berapa kali bola memantul sampai akhirnya berhenti?

Ayo Berpikir Kreatif

Apakah panjang lintasan bola akan sama jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu atau dilempar dari bawah? Jelaskan jawabanmu.

Pada permasalahan diketahui rasio $= \frac{1}{4}$.

Maka total panjang lintasan dapat ditentukan dengan rumus jumlah deret geometri berikut:

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$r = \frac{1}{4} \text{ maka } r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$r^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$r^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

$$r^n \rightarrow 0$$

$$S_n = \frac{a(1-0)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a(1-0)}{1-r}, \text{ dengan } n = \infty \text{ -1} < r < 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Deret geometri tak hingga konvergen dengan -1 < r < 1: $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

Deret geometri tak hingga divergen dengan r < -1 atau r > 1: $S_\infty = \frac{a \pm \infty}{1-r} = \pm\infty$.

Keterangan:

S_∞ = **jumlah deret geometri tak hingga** a = **suku pertama** r = **rasio**

Ayo Berpikir Kritis

Mengapa jumlah suku deret geometri tak hingga divergen hasilnya $\pm\infty$? Jelaskan jawabanmu!

Ayo Mencoba

Ayo berkolaborasi dengan teman kelompokmu, lalu hitunglah berapa total panjang lintasan bola tenis pada Eksplorasi 2.7?

Dalam menghitung Panjang lintasan bola, terdapat dua deret tak hingga, yaitu: deret tak hingga ketika bola jatuh dan ketika bola memantul ke atas.

Contoh:

Tentukan jumlah deret tak hingga dari 81 + 27 + 9 + 3 + …..

Alternatif penyelesaian:

Deret tak hingga di atas merupakan deret tak hingga konvergen, karena $r = \frac{1}{3}$ masuk dalam rentang

$-1 < r < 1$, maka jumlah deret tak hingga adalah:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{81}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{81}{\frac{2}{3}} \\ &= 81 \cdot \frac{3}{2} \\ S_\infty &= \frac{243}{2} \end{aligned}$$

Latihan 2.4

1. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah x. Tentukan x yang memenuhi sehingga jumlah deret geometri tak hingga tersebut adalah 10.

   Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.

   - Soal di atas hanya berisi informasi yaitu $S_\infty = 10$.
   - Karena $S_\infty = 10$ maka deret geometri tak hingga yang dimaksud pada soal adalah deret geometri tak hingga konvergen.
   - Hubungkan rumus jumlah deret geometri tak hingga dengan syarat rasio pada deret konvergen.

Dalam menyelesaikan soal deret tak hingga, kalian harus selalu ingat syarat rasio dari deret konvergen maupun divergen

2. Agar deret geometri $1 + (m - 1) + (m - 1)^2 + (m - 1)^3 + ...$ merupakan deret konvergen, tentukan nilai m.

   Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.

   - Tentukan terlebih dahulu rasio dari deret tersebut.

3. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga 4 + 12 + 36 + 108 + …
   Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 3.

   - Selidiki terlebih dahulu, deret geometri tak hingga tersebut merupakan deret konvergen atau divergen.
   - Tentukan S_∞.

Melalui subbab 2.2, kalian telah belajar mengenai deret aritmetika dan geometri.

Ayo Berefleksi

Apa perbedaan deret aritmetika dan geometri? Lalu apa perbedaan antara deret dan barisan? Jelaskan!

Apa perbedaan deret geometri tak hingga konvergen dan divergen? Jelaskan

Ayo Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi deret bilangan dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang telah dibahas.

Berikan contoh aplikasi deret geometri tak hingga konvergen dan divergen selain dari yang telah dibahas pada subbab 2.2.3.

Latihan 2.5

Soal Pemahaman

1. Suku ke-3 suatu barisan aritmetika adalah 28.500 dan suku ke-7 adalah 22.500. Tentukan nilai n agar suku $ke\text{-}n = 0$.
2. Suku ketiga dan kelima barisan geometri berturut-turut adalah 20 dan 80. Tentukan suku ke-10 barisan tersebut.
3. Hitunglah jumlah dari deret berikut.

4. $1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \ldots + \frac{23}{3}$
5. $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \ldots + 243$

Soal Aplikasi

6. Pertambahan penduduk di suatu desa setiap tahunnya membentuk barisan geometri. Pada tahun 2021, penduduk bertambah sebanyak 10 orang, lalu pada tahun 2023 sebanyak 90 orang. Berapa jumlah pertambahan penduduk pada tahun 2025?
7. Pak Artus seorang peternak ayam. Ia mengumpulkan telur ayam sebanyak 30.000 butir selama 2 bulan. Banyak telur yang Pak Artus kumpulkan membentuk barisan aritmetika. Pada hari pertama ia mengumpulkan telus ayam sebanyak 50 butir. Berapa butir telur yang Pak Artus kumpulkan pada hari terakhir?
8. Penambahan jumlah pasien yang terjangkit virus Covid-19 di suatu kota melonjak dua kali lipat di tiap minggunya. Berdasarkan data yang di rumah sakit, pada minggu pertama terdapat 24 orang yang dinyatakan positif. Pada minggu ketiga, tercatat 96 pasien positif Covid-19. Berapa total jumlah pasien pada bulan kedua?
9. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 8 meter. Apabila ketinggian yang dicapai saat memantul tiga perlima kali tinggi sebelumnya, tentukan panjang lintasan yang dilalui bola tersebut hingga berhenti memantul.

Soal Penalaran

10. Keliling lima buah lingkaran membentuk barisan aritmetika. Jika luas lingkaran terbesar adalah 1.386 cm^2 dan luas lingkaran terkecil adalah 154 cm^2. Tentukan keliling lingkaran pada urutan ketiga. $\pi = \frac{22}{7}$
11. Sisipkan 5 bilangan di antara 3 dan 192 agar susunan bilangan tersebut membentuk barisan geometri.
12. Sisi segitiga sama sisi panjangnya 20 cm. Di dalamnya terdapat segitiga sama sisi kedua dengan menghubungkan titik-titik tengah sisi-sisi segitiga pertama. Hal yang sama untuk segitiga ketiga, keempat, kelima, dan keenam. Berapa total keliling semua segitiga?

Refleksi

Dalam bab ini, kalian sudah belajar mengenai barisan dan deret.

1. Apa itu barisan?
2. Apa perbedaan barisan aritmetika dan barisan geometri?
3. Apa itu deret?
4. Apa perbedaan barisan dan deret?
5. Apa perbedaan deret aritmetika dan deret geometri?
6. Apa perbedaan deret geometri tak hingga konvergen dan divergen?

Materi Pengayaan

1. Buatlah suatu barisan geometri, dengan menentukan suku pertama, rasio, dan banyak suku pada tabel di bawah ini.

   Barisan geometri 1.

Suku pertama	....
Rasio	....
Banyak suku	....
... , ... , ... , ... , ..., ...	

2. Dari barisan yang telah kalian buat, ubahlah rasionya menjadi bilangan yang lebih besar, sajikan barisan geometri yang baru pada tabel di bawah ini.

   Barisan geometri 2.

Suku pertama	....
Rasio	....
Banyak suku	....
... , ... , ... , ... , ..., ...	

Ayo Berpikir Kritis

Apa yang terjadi pada suku-suku pada barisan tersebut setelah diubah nilai rasionya? Jelaskan!

3. Prediksilah, bagaimana suku-suku pada barisan tersebut jika rasionya diganti dengan $\frac{1}{2}$ dari rasio pada barisan geometri pertama.

4. Kalian dapat melihat perubahan dari suku-suku pada barisan geometri serta tampilan grafiknya pada aplikasi Geogebra melalui link berikut:

   https://www.geogebra.org/m/k8b2b2kn

   (sumber: Geogebra.org, penulis: Firmansyah)

Ayo Menggunakan Teknologi

Bentuk grafik pada barisan dapat dilihat menggunakan aplikasi Geogebra.

Uji Kompetensi

1. Tentukan suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret berikut:
   a. 4 + 2 + 1 + …
   b. 4 + 1 + (-2) + …
2. Tentukan suku ke-9 barisan aritmetika, jika diketahui jumlah dari suku ke-2, suku ke-5, dan suku-20 adalah 54.
3. Sebuah pipa dipotong menjadi 5 bagian. Panjang masing-masing bagian membentuk barisan geometri. Jika potongan pipa terpendek sepanjang 4 cm, dan potongan pipa terpanjang adalah 324 cm, maka tentukan panjang pipa semula.
4. Pada suatu ruang pertemuan, jumlah kursi pada baris tertentu lebih banyak 2 kursi dari baris sebelumnya. Perbandingan banyak kursi pada baris ke-5 dan baris ke-13 adalah 1 : 2. Baris terakhir terisi 50 kursi. Berapa total kursi pada ruang pertemuan tersebut?
5. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy^2} + \ldots \ldots \ldots$, jika diketahui $\frac{x+y}{xy} = 1$.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab
3

Vektor dan Operasinya

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. menyatakan vektor dalam berbagai representasi;
2. menunjukkan beberapa jenis vektor;
3. menyatakan vektor dalam komponen-komponen sistem koordinat;
4. melakukan operasi vektor serta menginterpretasi hasilnya secara geometris dan fisik; serta
5. menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

Berapa jauh dan ke mana arahnya?

Saat kalian berada di daerah wisata yang luas dan ingin mendatangi beberapa objek wisata, kalian mungkin menemukan dua jenis petunjuk jalan seperti pada Gambar 3.1 dan 3.2 berikut.

Gambar 3.1 Petunjuk Lokasi dengan Arah

Sumber: http://kebunrayadaerah.krbogor.lipi.go.id/kebun-raya-kuningan.html

Gambar 3.2 Petunjuk Lokasi dengan Arah dan Jarak

Sumber: gudanglampuku.com

Petunjuk mana yang memberikan kepastian lokasi? Mengapa?

Kalian paham bahwa mengetahui jarak dan arah dari suatu lokasi ke lokasi lain merupakan hal yang sangat penting. Pesawat terbang memerlukan kepastian berapa jauh dan ke arah mana apabila berpindah dari suatu lokasi ke lokasi lain. Bukan itu saja, besar dan arah kecepatan juga berubah selama perjalanan. Padatnya lalu lintas udara dan angin juga memengaruhi gerak pesawat.

Pemain bola dapat memperkirakan arah tendangannya dan kelajuan bola agar bola mencapai rekan setimnya atau masuk gawang. Olahraga permainan memerlukan jarak dan arah serta besar dan arah kecepatan.

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar atau nilai dan arah. Contohnya adalah perpindahan dan kecepatan. Besaran skalar hanya mempunyai besar atau nilai, tidak mempunyai arah. Contoh besaran skalar adalah massa melon 2,00 kg. Semua bilangan real merupakan skalar, dapat bernilai nol atau positif atau negatif.

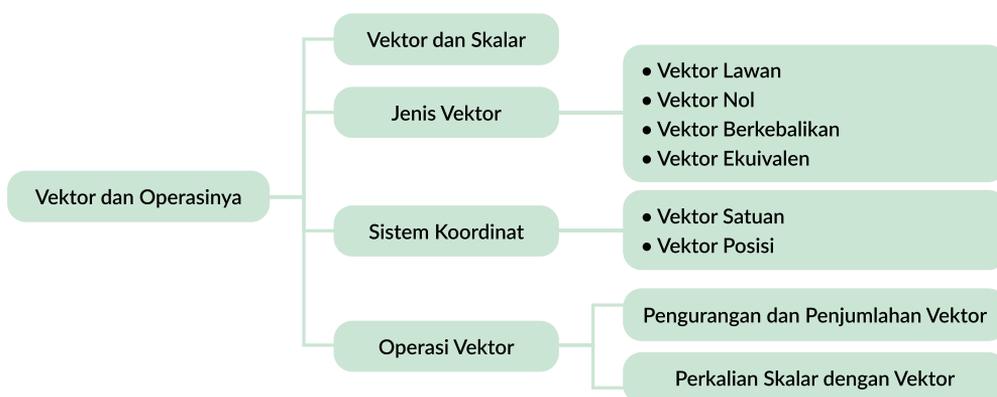
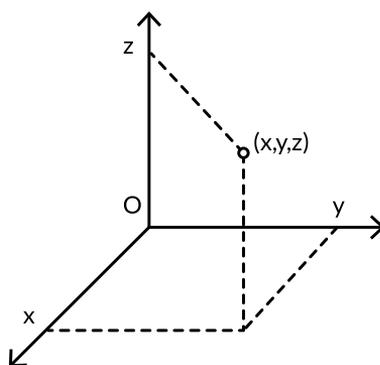
Dalam bab ini, kalian akan belajar tentang terminologi dan notasi vektor. Kalian akan mempelajari hubungan antara vektor dengan sistem koordinat. Komponen-komponen vektor dinyatakan dalam pasangan terurut (x,y) dan (x,y,z). Kalian akan menentukan kesamaan atau ekuivalensi dua vektor. Kalian akan belajar beberapa jenis vektor. Dua atau lebih vektor dapat dijumlahkan dan dikurangkan sehingga suatu vektor merupakan kombinasi linier dari dua atau lebih vektor. Vektor juga dapat dikalikan dengan suatu skalar.

Pertanyaan Pemantik

- Bagaimana merepresentasikan vektor?
- Apakah vektor dapat dioperasikan seperti bilangan biasa?
- Apa pentingnya peran vektor dalam kehidupan sehari-hari?

Kata Kunci

Ruas garis berarah, vektor lawan, vektor berkebalikan, vektor posisi, vektor nol, penjumlahan dan pengurangan vektor, perkalian skalar dengan vektor.

Peta Konsep

Untuk mempelajari vektor kalian perlu mengulang kembali sistem koordinat Kartesius yang merupakan tempat kedudukan titik-titik.

Gambar 3.3 Sistem Koordinat Kartesius

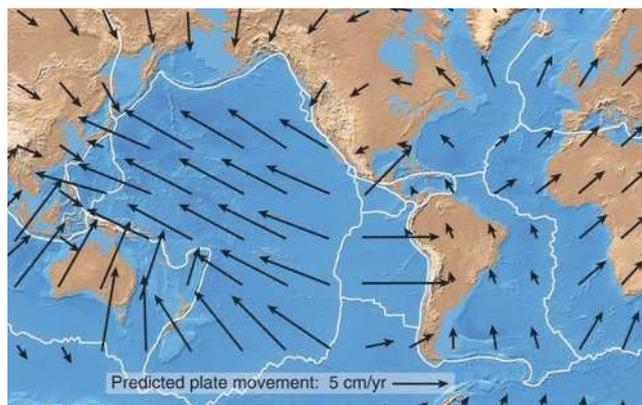
Sistem koordinat dapat berdimensi dua (dibentuk oleh dua sumbu yang saling tegak lurus) dan berdimensi tiga (dibentuk oleh tiga sumbu yang saling tegak lurus satu sama lain).

Perpotongan sumbu-sumbu terjadi di titik O. Arah dapat dinyatakan dengan kanan-kiri, atas-bawah dan depan-belakang. Sudut berkaitan dengan arah. Pada mata angin sudut 0° menunjukkan arah timur, sudut 90° menunjukkan arah utara, dan arah timur laut sama dengan sudut 45°.

Kalian akan mengulang sifat komutatif dan sifat asosiatif pada penjumlahan vektor. Kalian akan menerapkan aturan perkalian pada operasi perkalian skalar dengan vektor.

A. Terminologi, Notasi, dan Jenis Vektor

Eksplorasi 3.1 Apa itu Vektor?

Peta di bawah menunjukkan prediksi kecepatan gerak lempeng bumi yang ditunjukkan oleh anak panah. Batas-batas lempeng ditandai dengan warna putih. Ukuran 5 cm/tahun diberikan oleh anak panah di bawah sebagai patokan. Lempeng bumi yang bergerak dapat bertemu dengan lempeng bumi lainnya. Pertemuan dua lempeng bumi dapat menyebabkan terjadinya gempa bumi atau tsunami.

Gambar 3.4 Prediksi Kecepatan Lempeng Bumi

Sumber: https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html,

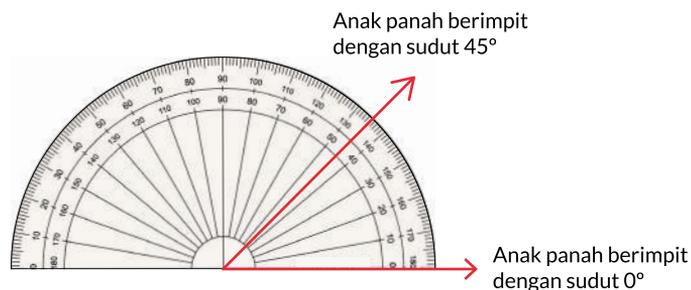
Kalian perhatikan anak panah-anak panah dalam gambar dan kerjakan soal-soal di bawah ini.

1. Lingkari satu lempeng bumi yang bergerak paling cepat.
2. Lingkari satu lempeng bumi yang bergerak paling lambat.
3. Apakah ada dua anak panah yang arahnya saling berlawanan?
4. Lingkari tiga anak panah yang arah dan panjangnya sama.
5. Apakah artinya jika dua anak panah mempunyai arah dan panjang yang sama?
6. Pilih tiga anak panah pada lempeng-lempeng yang dilalui Indonesia, namakan anak panah pertama, kedua' dan ketiga.

   Gunakan penggaris dan busur untuk menentukan panjang dan arah (sudut) anak panah.

   Jadikan panjang 5 cm/tahun (5 cm/*year*) dalam gambar 3.4 sebagai patokan sehingga hasil pengukuran perlu disesuaikan dengan patokan untuk mendapatkan kecepatan gerak lempeng. Misalnya, patokan anak panah 5 cm/*year* mempunyai panjang 0,6 cm. Salah satu anak panah panjangnya 0,3 cm maka kecepatan gerak lempeng adalah $\frac{0,3}{0,6} \times 5 = 2,5 \text{ cm/tahun}$. Angka $\frac{0,3}{0,6}$ disebut sebagai perbandingan panjang.

   Tuliskan hasilnya ke dalam tabel.

Cara mengukur sudut adalah sebagai berikut.

Gambar 3.5 Cara Mengukur Sudut

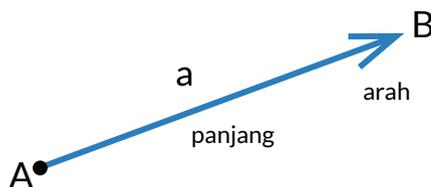
Tentukan garis horizontal yang berimpit dengan busur.

Bacalah bilangan pada busur yang berimpit dengan arah anak panah.

Tabel 3.1 Besar dan Arah Kecepatan Lempeng Bumi

Anak Panah	Arah (°)	Panjang (cm)	Perbandingan Panjang	Kecepatan gerak (cm/tahun)
Pertama				
Kedua				
Ketiga				

Menurut kalian, apa manfaat menggambarkan gerak lempeng dengan anak panah pada peta?

Gerak lempeng bumi digambarkan dengan anak panah yang memudahkan para ilmuwan untuk memprediksi pertemuan dua lempeng sehingga dapat mengantisipasi bencana yang muncul. Panjang anak panah menunjukkan seberapa cepat lempeng bergerak. Arah anak panah menunjukkan arah gerak. Anak panah merupakan ruas garis berarah yang menyatakan vektor. Makin panjang ruas garisnya, makin besar nilai vektornya. Arah vektor ditunjukkan oleh arah panah.

Gambar 3.6 Vektor dan Notasi

Notasi vektor adalah sebagai berikut.

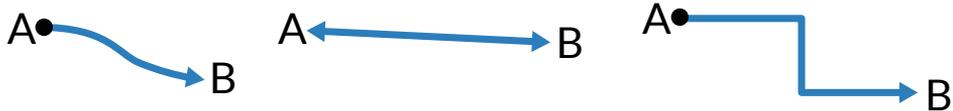
$\overrightarrow{AB}$ dimana A adalah pangkal vektor atau titik pangkal, sedangkan B adalah ujung vektor atau titik ujung.

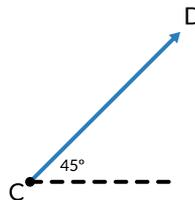
Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ ditulis sebagai $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ juga dapat dituliskan dengan menggunakan huruf bercetak tebal, sebagai **AB**.

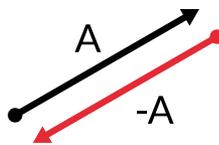
Penulisan vektor lainnya dengan menggunakan satu huruf yaitu **a** atau $\overrightarrow{a}$ atau **A** atau $\overrightarrow{A}$.

Dalam bab ini notasi vektor menggunakan huruf tebal, tetapi kalian dapat membuatnya dengan menggunakan anak panah.

Apakah bentuk-bentuk di bawah ini merupakan vektor? Mengapa? Ayo jelaskan!

1. Panjang dan Arah Vektor

Kalian perhatikan vektor **CD** dengan panjang 4 cm dan arahnya membentuk sudut 45^{O} dengan horizontal. Kalian dapat menyebutkan vektor **CD** dengan panjang 4 cm dan arah Timur Laut jika merujuk pada arah mata angin.

Gambar 3.7 Besar dan Arah Vektor

2. Vektor Negatif atau Vektor Lawan

Andi berjalan sejauh 100 m dengan arah 30°, kemudian Andi kembali ke posisi semula.

Gambar 3.8 Vektor dan Vektor Lawan

Vektor **A** atau $\vec{A}$ menyatakan perpindahan Andi yang pertama.

Vektor -**A** atau $-\vec{A}$ menyatakan perpindahan Andi yang kedua.

Vektor **A** dan -**A** sama panjang tetapi berlawanan arah.

-**A** adalah vektor lawan dari **A**.

> Vektor negatif atau vektor lawan adalah vektor dengan besar sama, tetapi arah berlawanan dengan suatu vektor.

Vektor Nol $\vec{0}$

Vektor nol adalah vektor dengan panjang nol dan tidak punya arah tertentu atau vektor dengan titik pangkal dan ujung yang sama. Vektor nol dinyatakan dengan titik secara grafis.

Jika Andi berjalan sejauh 100 m ke timur kemudian 100 m ke barat maka Andi mengalami perpindahan 0.

Apakah vektor **A** merupakan vektor lawan dari **B**?

Gambarkan vektor lawan dari **CD**, yaitu vektor **DC**. Lihat vektor **CD** pada gambar 3.7.

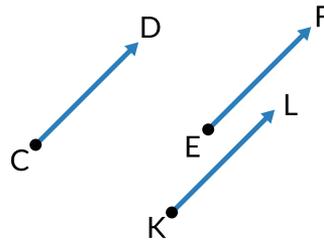
Berapa sudut yang dibentuk antara vektor **CD** dengan vektor **DC**?

3. Vektor Ekuivalen (Vektor yang Sama)

Jika ada vektor lain dengan panjang 3 cm dan sudut 45°, maka dikatakan vektor tersebut ekuivalen dengan vektor CD.

Ketiga vektor, dalam gambar 3.9, sama atau ekuivalen walaupun ketiganya mempunyai titik awal yang berbeda, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\mathbf{CD} = \mathbf{EF} = \mathbf{KL}$$

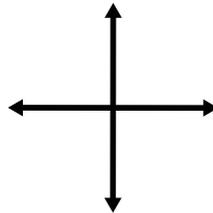
Vektor **CD** ekuivalen dengan vektor **EF** dan vektor **KL**.

Gambar 3.9 Vektor-Vektor Ekuivalen

Suatu vektor ekuivalen dengan vektor lain jika mempunyai besar dan arah yang sama dengan vektor lain tersebut.

Pada peta lempeng bumi, coba kalian perhatikan vektor-vektor yang ekuivalen atau sama. Dapatkah kalian memberi contoh dua vektor ekuivalen dalam kehidupan sehari-hari?

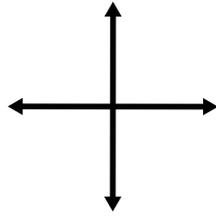
Latihan 3.1

1. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 60 km/jam dan menuju arah timur. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.

   Petunjuk menyelesaikan soal.
   Tuliskan nama arah setiap mata angin.

   Untuk menggambar panjang vektor pikirkan skala 1 cm mewakili berapa km/jam.

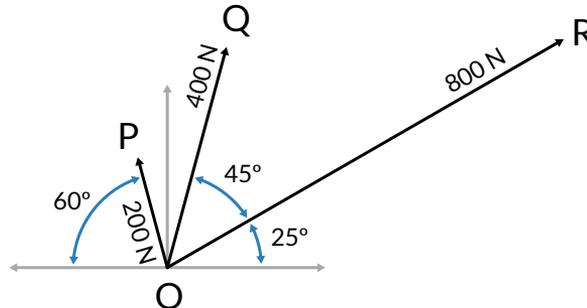
   Beri nama vektor tersebut berdasarkan titik awal (pangkal vektor) dan titik akhir (ujung vektor).

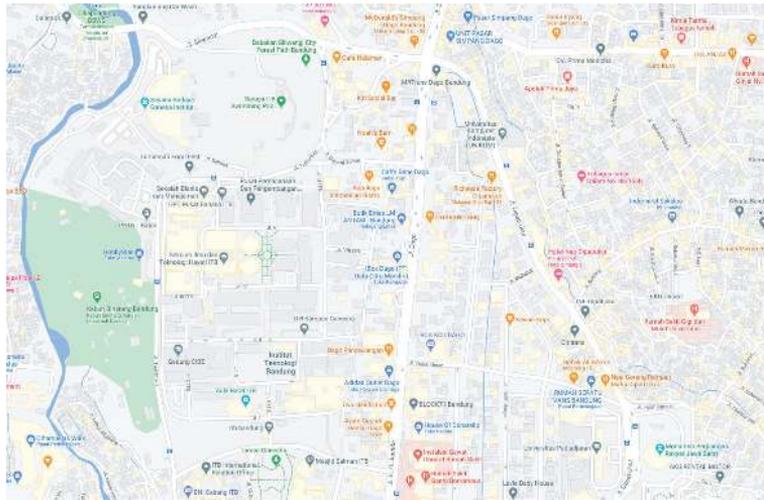
2. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 45 km/jam dan menuju arah tenggara. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.

   Petunjuk menyelesaikan soal.
   Tentukan arah tenggara pada mata angin.

3. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 60 km/jam dan menuju arah barat daya. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.
4. Gambarkan vektor kecepatan mobil dengan kelajuan 60 km/jam dan arah gerak membentuk sudut 45°. Tentukan titik awal dan titik akhir. Beri nama vektornya dan tuliskan skalanya.
5. a. Gambarkan vektor kecepatan pesawat terbang dengan kelajuan 450 km/jam dan arah terbang membentuk sudut 120°.

   b. Gambarkan vektor negatif dari nomor a.

Latihan 3.2

1. Tentukan nama, besar, dan arah dari setiap vektor di bawah ini.

2. Gambarkan vektor-vektor negatif dari vektor-vektor **OP**, **OQ**, dan **OR**. Gunakan skala untuk menggambar panjangnya.
3. Perhatikan peta kota Bandung di bawah ini.

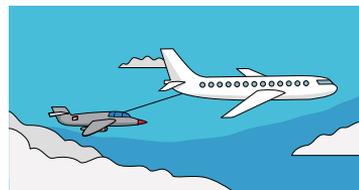
Sumber: https://goo.gl/maps/hvGqjkmLSGBnADwL9

a. Tentukan satu titik di Universitas Padjadjaran dan satu titik di Lebak Siliwangi.

b. Buat vektor dari kedua titik tersebut, tentukan besar dan arah vektornya.

c. Buat vektor dengan nilai (besar) yang lebih besar daripada nomor a tetapi arah sama.

d. Buat vektor dengan nilai (besar) yang lebih kecil daripada nomor a tetapi arah sama.

e. Buat vektor yang ekuivalen dengan vektor pada nomor a.

4. Pesawat kecil sedang mengisi bahan bakar dari pesawat besar di udara. Mengapa vektor kecepatan pesawat kecil harus ekuivalen atau sama dengan pesawat besar?

5. Buatlah segitiga sama sisi dan bagilah menjadi beberapa segitiga kecil berukuran sama. Tentukan berapa banyak segitiga tersebut agar diperoleh 3 vektor ekuivalen.

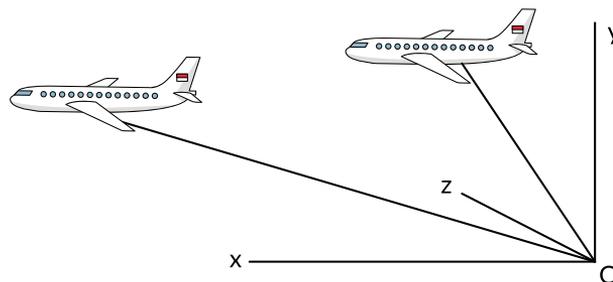
Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat memberikan contoh-contoh vektor dalam kehidupan sehari-hari?
2. Apakah kalian dapat menggambarkan vektor dan menyebutkan notasinya?
3. Dapatkah kalian menentukan vektor-vektor ekuivalen?
4. Dapatkah kalian membuat vektor negatif atau vektor lawan dari suatu vektor?

Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk menggambar vektor dan belajar cara memanfaatkannya. https://www.geogebra.org/

B. Vektor dan Sistem Koordinat

Pilot pesawat terbang melaporkan posisinya selama penerbangan dari satu titik ke titik lain di udara kepada petugas menara pengawas bandara. Pilot akan meminta izin jika ingin mengubah ketinggian atau dan arah penerbangan.

Gambar 3.10 Posisi Pesawat Terbang dalam Sistem Koordinat Kartesius

Posisi memerlukan kerangka acuan atau sistem koordinat.

Sistem Koordinat Kartesius dicetuskan oleh Rene Descartes, ahli matematika berkebangsaan Prancis. Descartes menemukannya ketika mengamati lalat merayap di langit-langit rumahnya.

Eksplorasi 3.2 Menggambar Vektor pada Sistem Koordinat

Untuk menyelesaikan eksplorasi di bawah ini kalian memerlukan kertas berpetak.

1. Mula-mula lalat berada di titik asal O dan merayap ke titik $P(3, 4)$. Lalat bergerak lagi menuju titik $Q(-2, -8)$ hingga berhenti di titik $R(2, -5)$. Tentukan titik O terlebih dahulu. Gambarkan vektor perjalanan lalat dalam sistem koordinat Kartesius. Gunakan penggaris dan busur untuk menentukan panjang dan sudut.
2. Lalat mula-mula berada pada titik $(2, 3)$ kemudian bergerak 1 petak ke barat lanjut dengan 1 petak ke selatan.
   a. Tentukan titik asal terlebih dahulu, kemudian gambarkan vektornya. Tentukan panjang dan arah vektor.
   b. Pilih titik asal terlebih dahulu, kemudian gambarkan vektornya. Tentukan panjang dan arah vektor.

1. Apa perbedaan vektor dengan koordinat suatu titik?
2. Apakah pemilihan titik asal pada sistem koordinat memengaruhi besar dan arah vektor?

Lokasi suatu titik dapat dinyatakan dalam sistem koordinat Kartesius. Pada sistem koordinat dua dimensi, lokasi titik dinyatakan dalam pasangan terurut (x, y) dan pada sistem koordinat tiga dimensi, lokasi titik dinyatakan dalam (x, y, z).

Jika suatu pesawat berada pada suatu titik tertentu dan waktu tertentu, maka dapat diketahui lokasi berikutnya jika diketahui vektor perpindahan pesawat.

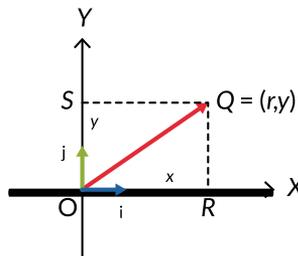
Teknologi, melalui beberapa aplikasi, menolong manusia untuk memilih alternatif rute perjalanan yang melibatkan arah dan jarak tempuh dengan sistem koordinat.

Gambar 3.11 Menentukan Rute dengan Aplikasi
Sumber: https://waze.com

Ayo Berdiskusi

Dapatkah aplikasi perjalanan dibuat tanpa sistem koordinat Kartesius? Mengapa?

1. Vektor Berdimensi Dua pada Sistem Koordinat

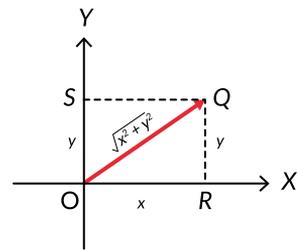
Perhatikan sistem koordinat Kartesius di bawah ini.

Gambar 3.12 Vektor Berdimensi Dua

Koordinat titik O adalah $(0,\ 0)$ dan Q adalah $(x,\ y)$. Vektor satuan diperlukan untuk menunjukkan bagaimana mencapai titik Q dari titik O.

i adalah vektor satuan dalam arah-x (horizontal) dan **j** adalah vektor satuan dalam arah-y (vertikal). Vektor satuan mempunyai besar 1 satuan. Arah horizontal negatif dinyatakan dengan **-i** dan arah vertikal negatif dinyatakan dengan **-j**.

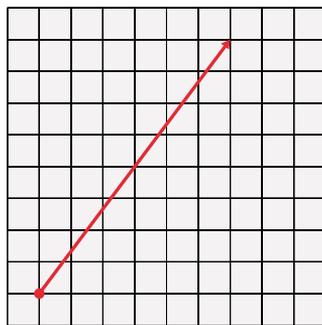
Vektor **OQ** dinyatakan sebagai berikut.

$\mathbf{OQ} = \mathrm{x}\ \mathbf{i} + \mathrm{y}\ \mathbf{j}$

Ada dua komponen yang membentuk vektor **OQ,** komponen horizontal dan komponen vertikal. Jika dari titik O arah komponen horizontal adalah timur-barat, maka arah komponen vertikal adalah utara-selatan. Komponen-x merupakan proyeksi ortogonal vektor pada sumbu-x. Komponen-y merupakan proyeksi ortogonal vektor pada sumbu-y.

Gambar 3.13 Panjang Vektor Berdimensi Dua

Vektor dengan dua komponen disebut sebagai vektor berdimensi dua.

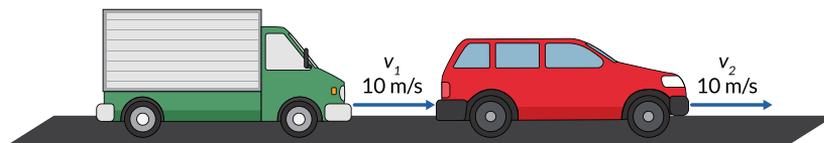
Panjang vektor sama dengan jarak antara titik pangkal dengan titik ujung. Jarak antara dua titik sama dengan panjang sisi miring dari segitiga siku-siku.

2. Komponen-Komponen Vektor

Gambar 3.14 Vektor AB dan Komponen-Komponennya

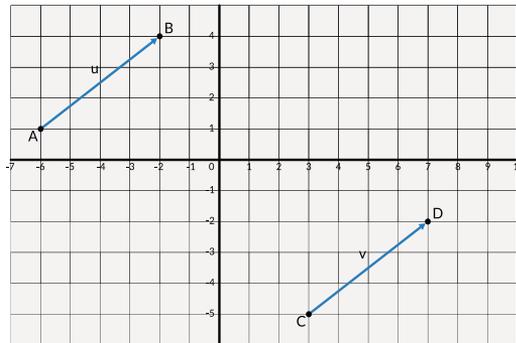
$\mathbf{AB} = 6\ \mathbf{i} + 8\ \mathbf{j}$

Panjang vektor $\mathbf{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

3. Vektor-Vektor Ekuivalen pada Sistem Koordinat Kartesius

Dua mobil berbeda bergerak dengan kelajuan 10 m/detik dan dalam arah yang sama. Keduanya mempunyai vektor kecepatan yang sama walau berada pada posisi berbeda.

Gambar 3.15 Dua Vektor Kecepatan Ekuivalen

Kalian masih ingat bahwa dua vektor ekuivalen jika mempunyai besar dan arah sama, tidak bergantung pada letaknya.

Perhatikan dua vektor perpindahan dalam sistem koordinat di bawah ini.

Gambar 3.16 Dua Vektor Ekuivalen pada Sistem Koordinat

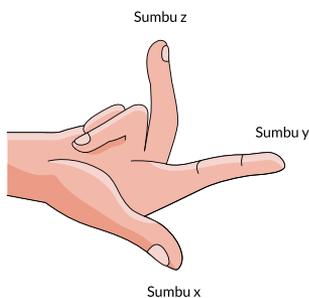
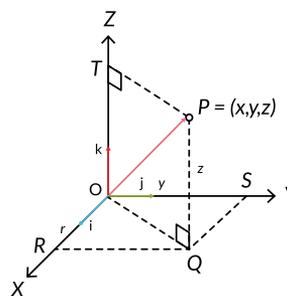
Vektor **u** dan **v** ekuivalen, dinyatakan dengan $4\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j}$, walau keduanya mempunyai koordinat titik pangkal dan koordinat titik ujung yang berbeda. Komponen horizontal dan komponen vertikal adalah 4 dan 3.

Ayo Berdiskusi

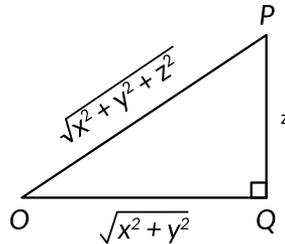
Mengapa vektor-vektor ekuivalen tidak bergantung pada letak mereka?

4. Vektor Berdimensi Tiga pada Sistem Koordinat Kartesius

Vektor dengan tiga komponen, disebut sebagai vektor berdimensi tiga. Jika dari titik O arah komponen horizontal adalah timur-barat, arah komponen vertikal adalah utara-selatan, maka arah satunya lagi adalah atas-bawah atau depan-belakang atau tegak lurus terhadap bidang xy.

Sistem koordinat tiga dimensi dapat diperagakan dengan tiga jari. Ibu jari menghadap ke kalian adalah sumbu-x, jari telunjuk mengarah ke kanan adalah sumbu-y dan jari tengah mengarah ke atas adalah sumbu-z.

Gambar 3.17 Sistem Koordinat dengan Jari-Jari

Gambar 3.18 Vektor Berdimensi Tiga $\mathbf{OP} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$

i adalah vektor satuan dalam arah-x (horizontal), **j** adalah vektor satuan dalam arah-y (vertikal) dan **k** adalah vektor satuan, yang tegak lurus terhadap bidang xy. Arah horizontal negatif dinyatakan dengan -**i**, arah vertikal negatif dinyatakan dengan -**j** dan arah negatif dalam z dinyatakan dengan -**z**.

Panjang vektor diberikan sebagai berikut.

Gambar 3.19 Panjang Vektor Berdimensi Tiga

Vektor dapat saja berada dalam ruang berdimensi-n, tetapi kita hanya belajar vektor berdimensi dua dan vektor berdimensi tiga.

5. Vektor Kolom dan Vektor Baris

Vektor yang dituliskan dalam bentuk kolom adalah **vektor kolom**. Vektor yang dituliskan dalam bentuk baris adalah **vektor baris**. Komponen-komponen vektor kolom dituliskan sebagai berikut.

- $(3\ \ 4)$ atau $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ untuk vektor berdimensi dua
- $(2\ \ 1\ \ 3)$ atau $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ untuk vektor berdimensi tiga

Vektor-vektor satuan dalam sistem koordinat Kartesius berdimensi dua adalah:

- vektor satuan dalam arah horizontal $(1\ \ 0)$ atau $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- vektor satuan dalam arah vertikal $(0\ \ 1)$ atau $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektor-vektor satuan dalam sistem koordinat Kartesius berdimensi tiga adalah:

- vektor satuan dalam arah horizontal $(1\ \ 0\ \ 0)$ atau $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- vektor satuan dalam arah vertikal $(0\ \ 1\ \ 0)$ atau $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- vektor satuan dalam arah tegak lurus terhadap bidang xy $(0\ \ 0\ \ 1)$ atau $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Vektor Satuan dari Suatu Vektor

Vektor satuan dapat saja diperluas pemahamannya. Kalian perhatikan vektor **PQ** yang berada pada sistem koordinat Kartesius.

Vektor satuan **PQ** adalah vektor **PQ** dibagi dengan panjangnya.

$\mathbf{a}_{PQ} = \frac{\boldsymbol{PQ}}{|\boldsymbol{PQ}|}$

$|\boldsymbol{PQ}|$ adalah panjang vektor.

Gambar 3.20 Vektor **PQ**

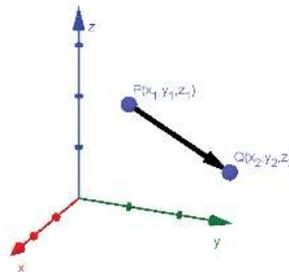
Vektor satuan menunjukkan arah vektor dalam suatu ruang.

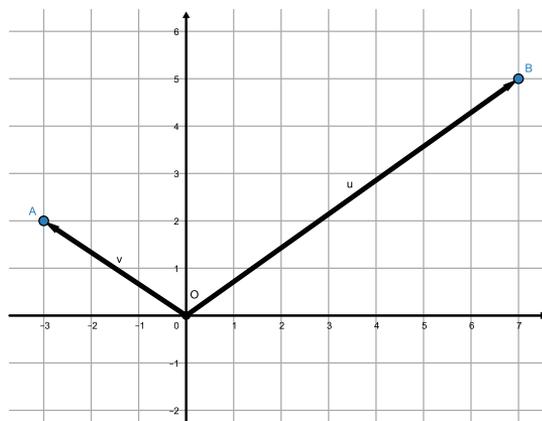
Contoh soal: Menentukan vektor satuan dari **v**.

$\mathbf{v} = (3 \quad 6 \quad 4)$

$$\hat{v} = \frac{\begin{bmatrix}3 & 6 & 4\end{bmatrix}}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}3 & 6 & 4\end{bmatrix}}{\sqrt{61}}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{61}} & \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{4}{\sqrt{61}}\end{bmatrix}$$

7. Vektor Posisi

Vektor **OA** dan **OB** merupakan vektor posisi, karena dimulai dari titik asal O dan berakhir di A dan B. Vektor posisi selalu dimulai dari titik O dan berakhir pada suatu titik lain. Vektor posisi OA dan OB adalah $(-3 \ 2)$ dan $(7 \ 5)$.

Gambar 3.21 Vektor Posisi OA dan OB

Vektor posisi adalah vektor yang berpangkal di titik O yang merupakan pusat koordinat dan berujung di suatu titik dalam sistem koordinat.

8. Vektor Berkebalikan

Vektor $\mathbf{AB} = 6\ \mathbf{i} + 8\ \mathbf{j}$

Panjang vektor $\mathbf{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

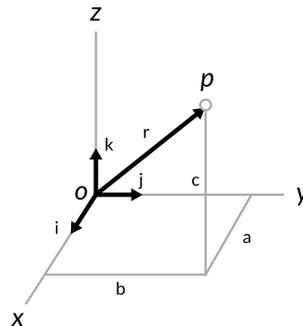
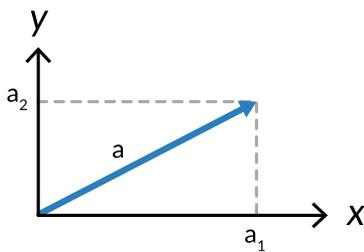
Vektor berkebalikan dari **AB** adalah $\frac{1}{100}\ (6\ \mathbf{i} + 8\ \mathbf{j})$.

Vektor berkebalikan adalah vektor yang panjangnya $\frac{1}{\text{panjang}}$ vektor tersebut.

Tahukah Kalian?

Vektor berkebalikan digunakan dalam mempelajari kisi-kisi dari kristal zat padat.

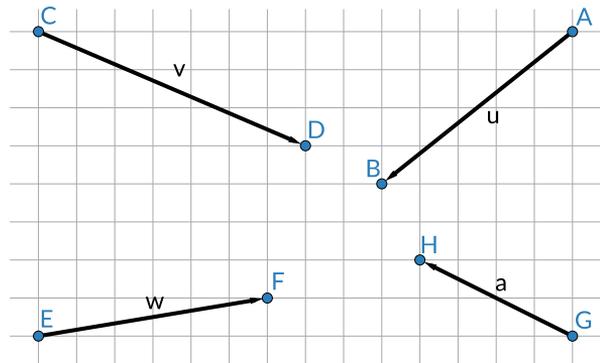
Latihan 3.3

1. Nyatakan kedua vektor posisi dalam vektor kolom dan vektor baris.

Ayo Berpikir Kreatif

2. Gambarkan vektor posisi yang diberikan oleh $\mathbf{OP} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{OQ} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

   Petunjuk tentukan sumbu x, y, dan z.

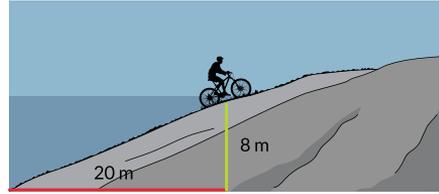
3. Tentukan vektor satuan dan vektor berkebalikan vektor-vektor dalam soal nomor 2.

4. a. Nyatakan vektor-vektor di bawah ini sebagai vektor kolom atau vektor baris.

Latihan 3.4

1. Perhatikan gambar dari aplikasi *flightradar*24 yang menunjukkan 202.157 pesawat terbang di angkasa Bumi pada tanggal 29 Juni. Pesawat berukuran kecil maupun besar, juga pesawat komersial maupun bukan komersial.

Sumber: https://www.independent.co.uk/travel/news-and-advice/flights-sky-map-worldwide-air-traffic-aviation-busiest-day-june-a8428451.html

Apa peran vektor dan sistem koordinat dalam mengatur lalu lintas penerbangan?

2. Nyatakan vektor satuan dari vektor perpindahan seseorang yang sedang naik gunung dengan bersepeda. Tentukan arahnya dalam sistem koordinat.

3. Gunakan ubin di rumahmu sebagai sistem koordinat. Tentukan vektor perpindahan jika kalian berjalan dari suatu lokasi benda ke lokasi benda lainnya, misalnya dari lokasi lemari ke lokasi kursi. Ambillah posisi tengah untuk setiap lokasi.
4. Menurut kalian, apakah vektor kecepatan dapat dinyatakan dalam sistem koordinat?

Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat menunjukkan komponen-komponen suatu vektor dan menentukan panjangnya?
2. Bagaimana menyatakan komponen-komponen dalam vektor kolom dan vektor baris?
3. Apa perbedaan vektor posisi, vektor kolom, dan vektor berkebalikan?

Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan aplikasi *GeoGebra* atau yang lainnya untuk menggambarkan vektor pada sistem koordinat Kartesius.

https://www.geogebra.org/

C. Operasi Vektor

1. Penjumlahan Vektor

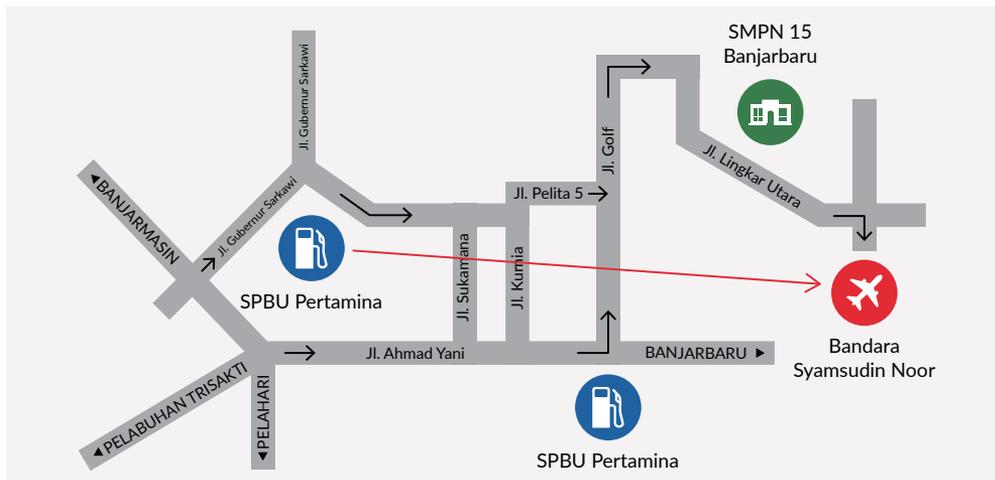
Eksplorasi 3.3 Menentukan Rute dalam Bentuk Penjumlahan Vektor

Perhatikan peta di bawah ini.

Apakah ada rute langsung dari pompa bensin ke Bandara Syamsudin Noor, yang ditandai dengan garis merah? Tentu saja tidak bisa.

Coba tentukan satu rute yang paling sederhana, gambarkan setiap vektor perpindahannya dari satu lokasi ke lokasi yang lain.

Ada berapa vektor yang digambarkan?

Kalian akan punya rangkaian vektor yang tidak terputus dengan setiap ujung vektor bertemu dengan pangkal vektor berikutnya.

Gambar 3.22 Peta Banjarmasin

Pikirkan satu masalah lagi.

Eksplorasi 3.4 Gerak Perahu Menyeberangi Sungai

Sebuah perahu menyeberang sungai dengan kecepatan tertentu.

Gambar 3.23 Perahu Menyeberangi Sungai

Menurut kalian apakah yang terjadi dengan lintasan perahu jika:

a. kelajuan arus sungai nol, dan

b. kelajuan arus sungai tak nol?

Gambarkan lintasan perahu untuk dua kasus berbeda ini.

Kalian bisa melakukan kegiatan sederhana dengan menyediakan kertas A4 atau yang ukurannya berbeda dan perahu kertas yang diikat dengan tali. Kertas merupakan sungai sehingga jika arus sungai tak nol maka kertas harus digerakkan bersamaan dengan perahu. Perhatikan, arah gerak arus sungai tegak lurus terhadap gerak perahu.

Kedua masalah di atas merupakan masalah penjumlahan vektor. Penjumlahan vektor berbeda dengan penjumlahan skalar. ***Hasil penjumlahan vektor disebut sebagai resultan vektor.***

Jika 2 kg gula dan 3 kg gula dijumlahkan, berapa hasilnya? Pastinya 5 kg.

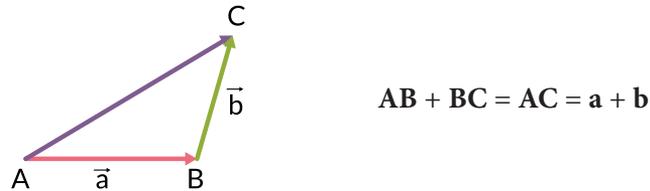
Bagaimana jika perpindahan 2 m dijumlahkan dengan perpindahan 3 m? Seseorang berjalan 2 m ke timur kemudian 3 m ke barat berbeda hasilnya dengan berjalan 2 m ke timur kemudian 3 m ke timur lagi.

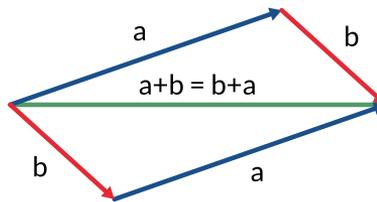
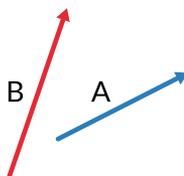
Ayo Berpikir Kritis

Menurut kalian apa perbedaan penjumlahan skalar dengan penjumlahan vektor?

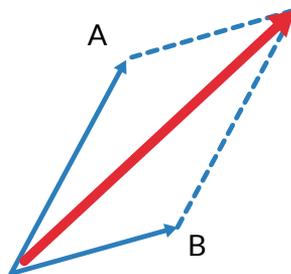
Menarik kan, penjumlahan vektor? Ayo, kalian belajar lebih lanjut.

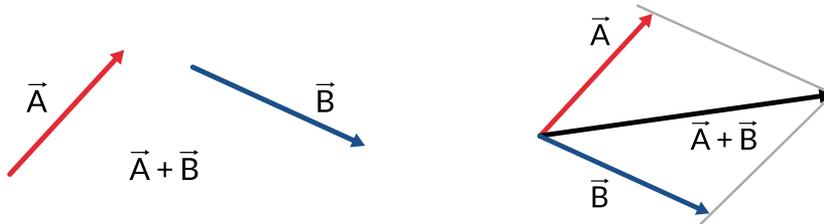
a. Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Segitiga

Penjumlahan vektor dapat dilakukan dengan cara grafis. Ujung vektor pertama bertemu dengan pangkal vektor kedua. Hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dengan ujung vektor kedua. Betuk penjumlahan adalah segitiga.

Gambar 3.24 Penjumlahan Vektor dengan Metode Segitiga

Penjumlahan vektor mengikuti sifat komutatif **a** + **b** = **b** + **a**

Gambar 3.25 Sifat Komutatif dari Penjumlahan Vektor

Tunjukkan bahwa **A** + **B** = **B** + **A**.

b. Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Jajar Genjang

Penjumlahan vektor berkaitan dengan bentuk jajar genjang.

Gambar 3.26 Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Jajar Genjang

Contoh soal: Jumlahkan kedua vektor di bawah ini

Gambar 3.27 Contoh Penjumlahan Dua Vektor dengan Metode Jajar Genjang

Penjumlahan dua vektor juga dapat mengambil bentuk persegi panjang.

Ayo Mencoba

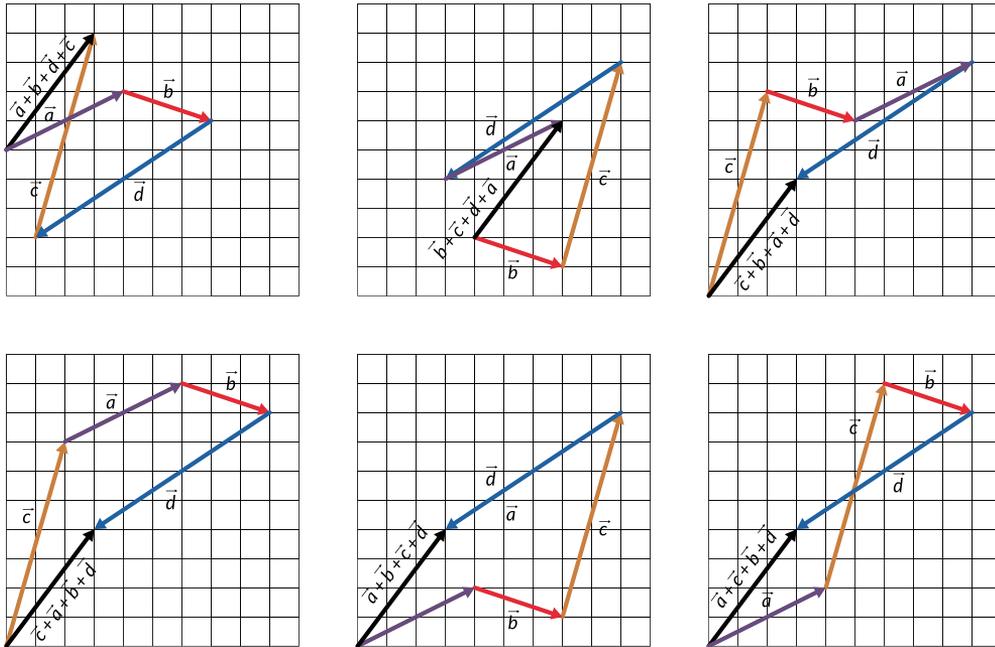
Tunjukkan bahwa penjumlahan vektor dengan metode jajar genjang juga memenuhi sifat komutatif.

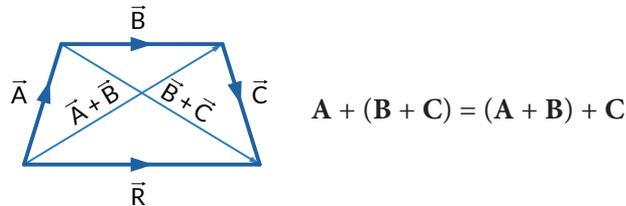
Ayo Berpikir Kreatif

Jika ada tiga vektor, bagaimana cara menjumlahkannya dengan metode jajar genjang?

c. Penjumlahan dengan Metode Poligon

Sifat komutatif tetap berlaku untuk penjumlahan lebih dari dua vektor. Karena vektor hanya ditentukan oleh panjang dan arahnya, maka dapat dipindahkan dengan leluasa.

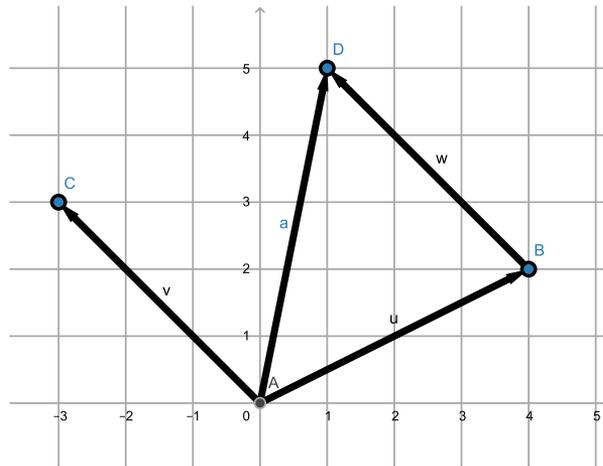
Penjumlahan secara grafis selalu dilakukan dengan cara ujung vektor sebelumnya bertemu dengan pangkal vektor sesudahnya.

Gambar 3.28 Penjumlahan Vektor dengan Metode Poligon

Penjumlahan vektor juga memenuhi sifat asosiatif.

Gambar 3.29 Sifat Asosiatif Penjumlahan Vektor

Ayo Bekerja Sama

Bentuklah kelompok yang terdiri atas 4 anggota. Setiap anggota membuat satu vektor yang berbeda dengan yang lain. Buatlah berbagai cara penjumlahan keempat vektor yang berbeda.

d. Penjumlahan Vektor secara Komponen

Selain secara grafis vektor juga dapat dijumlahkan secara komponen.

Gambar 3.30 Penjumlahan Secara Komponen

$\mathbf{AC} + \mathbf{AB} = (-3\ 3) + (4\ 2) = (1\ 5)$

Penjumlahan secara komponen dan secara grafis memberikan hasil yang sama.

1. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor secara grafis?
2. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor dengan menjumlahkan komponen-komponennya?

2. Pengurangan Vektor

Gambar di bawah menunjukkan *game Angry Birds*. Perhatikan gerak benda yang terlontar dari katapel.

Gambar 3.31 *Game Angry Birds*

Sumber: https://indianexpress.com/

Kekuatan *game*, salah satunya, adalah gerak objek-objek dalam *game* tersebut. *Games* menggunakan konsep vektor dan operasinya dalam pembuatannya, khususnya perpindahan dari satu lokasi ke lokasi lain.

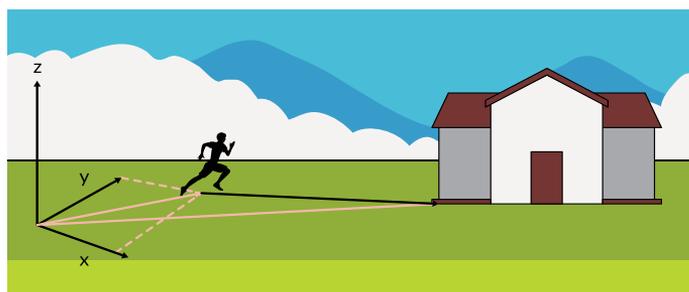
Eksplorasi 3.5 Menentukan Pengurangan Vektor

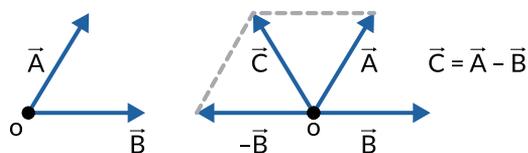
Seekor monyet berada pada posisi $(3, 4)$ akan mengambil pisang yang berada pada posisi $(2, 1)$. Gambarkan vektor posisi monyet, vektor posisi pisang, dan vektor perpindahan monyet untuk mengambil pisang. Gunakan kertas berpetak.

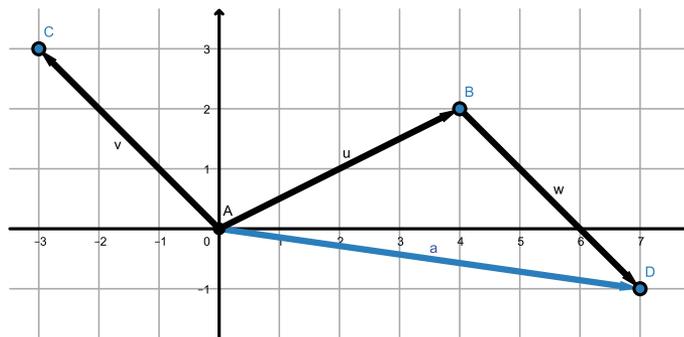
Berapa vektor perpindahan monyet dalam satuan **i** dan **j**?

Bagaimana hubungan antara vektor posisi monyet, vektor posisi pisang, dan vektor perpindahan monyet dalam operasi vektor?

Dari eksplorasi ini kalian belajar bahwa vektor bisa juga dikurangkan selain dijumlahkan. ***Hasil pengurangan vektor disebut sebagai resultan vektor.***

Perhatikan contoh operasi pengurangan vektor dalam *game* untuk mengetahui jarak orang dengan rumah jika vektor posisi orang dan rumah diketahui.

Gambar 3.32 Pengurangan Vektor dalam *Game*

Salah satu cara menyelesaikan soal pengurangan vektor dengan cara seperti yang ditunjukkan dalam gambar 3.33 di bawah ini. Arah vektor **OB** dibuat berlawanan dan dijumlahkan dengan vektor **OA**.

Gambar 3.33 Pengurangan Dua Vektor

Pengurangan vektor dapat dilakukan secara komponen. Perhatikan dua vektor di bawah ini.

Gambar 3.34 Pengurangan Dua Vektor secara Komponen

$$\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + (-\mathbf{AC}) = (4\ 2) + (3\ -3) = (7\ -1)$$

a. Vektor Nol $\vec{0}$

Vektor nol adalah vektor dengan panjang nol dan tidak punya arah tertentu atau vektor dengan titik pangkal dan ujung yang sama. Vektor nol dinyatakan dengan titik secara grafis.

Jika Andi berjalan sejauh 100 m ke timur kemudian 100 m ke barat, maka Andi mengalami perpindahan 0.

1. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor secara grafis?
2. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor dengan mengurangi komponen-komponennya?

3. Perkalian Skalar dengan Vektor

Eksplorasi 3.6 Perkalian Skalar dengan Vektor

Kalian buat satu garis lurus melalui tanda bintang di dekat B, U, dan R. Ukur panjang garis BR, BU, dan UR.

Gambar 3.35 Peta Pulau Bali

Sumber: https://moondoggiesmusic.com/peta-bali/#gsc.tab=0

Ayo Berdiskusi

1. Nyatakan panjang vektor **BU** dan **UR** terhadap **BR**.
2. Hal apa yang sama dari ketiganya?

Kalian perhatikan vektor perpindahan dari Palimanan ke Pejagan (vektor **PG**) merupakan gabungan vektor perpindahan Palimanan–Kanci (vektor **PK**) dan vektor perpindahan Kanci–Pejagan (vektor **KG**).

Vektor **PK** = $\frac{4}{9}$ vektor **PG** dan vektor **KG** = $\frac{5}{9}$ vektor **PG**.

Vektor **KP** = $-\frac{4}{9}$ vektor **PG** dan vektor **GK** = $-\frac{5}{9}$ vektor **PG**.

Gambar 3.36 Palimanan--Pejagan

Sumber; https://www.viva.co.id/arsip/262958-para-penguasa-tol-trans-jawa

Vektor yang dikalikan dengan skalar positif menghasilkan vektor dengan panjang berbeda.

Vektor yang dikalikan dengan skalar negatif menghasilkan vektor dengan panjang dapat berbeda dan arah berlawanan.

$\vec{A}$ $\vec{B} = 2\vec{A}$ $\vec{C} = -2\vec{A}$

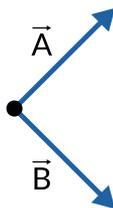
Gambar 3.37 Perkalian Skalar dengan Vektor

Ayo Bekerja Sama

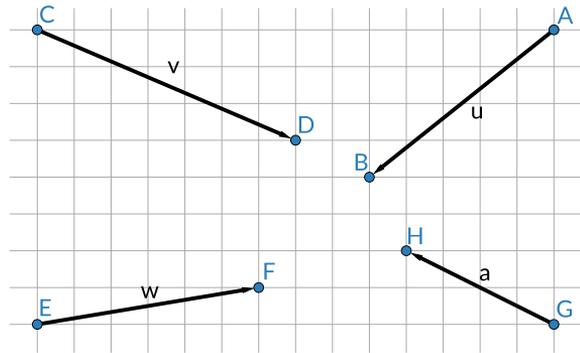
Buktikan perkalian skalar dengan vektor secara grafis (pada kertas berpetak) dan komponen memberikan hasil yang sama. Tentukan satu vektor terlebih dahulu. Setiap anggota dapat memilih skalar yang diinginkan.

1. Apakah kalian dapat melakukan perkalian skalar dengan vektor secara grafis?
2. Apakah kalian dapat melakukan perkalian skalar dengan vektor dengan mengalikan komponen-komponennya?

Latihan 3.5

1. Perhatikan dua vektor di bawah ini.

   a. Gambarkan 2**A**
   b. Gambarkan 3**B**
   c. Gambarkan 2**A** + 3**B**

2. Buat dua titik $A(3,\ 2)$ dan $B(-6,\ 8)$ dalam sistem koordinat Kartesius.
   a. Gambarkan vektor posisi **OA** dan **OB**.
   b. Gambarkan hasil pengurangan vektor **OB** dengan **OA**.
   c. Buat pengurangan kedua vektor dengan menggunakan vektor kolom.

3. Perhatikan gambar vektor-vektor di bawah ini. Operasikan vektor-vektor secara grafis dan komponen. Gunakan kertas berpetak untuk operasi vektor secara grafis.Tentukan juga panjang vektor hasil penjumlahan.

a. **EF** + **GH**

b. **2 EF** - **GH**

c. **EF** + **GH** + **CD**

d. **EF** - **GH** + 2 **CD**

e. **EF** + **GH** + **CD** + **AB**

f. **EF** – 3 **GH** – **CD**

4. Perhatikan peta Papua di bawah ini.
   a. Gambarkan vektor Jayapura-Wamena, yaitu **JW** dan vektor Jayapura-Nabire, yaitu **JN**.

   b. Gambarkan pengurangan vektor **JW** dengan vektor **JN**.

Latihan 3.6

1. Jika vektor **a** $= (x_1 \; y_1)$ dan **b** $= (x_2 \; y_2)$ tunjukkan bahwa **a** + **b** = **b** + **a**
2. Mengapa metode jajar genjang merupakan salah satu metode penjumlahan vektor?

3. Buktikan bahwa A, B, dan C kolinier terletak pada satu garis dengan menunjukkan bahwa AB dan BC paralel. Tentukan titik A, B, dan C terlebih dahulu.
4. Tentukan panjang vektor resultan.

5. Buatlah 3 vektor sembarang a, b, dan c pada kertas berpetak.

   Gambarkan hasil $2a + b - 2c$.

Ayo Menggunakan Teknologi

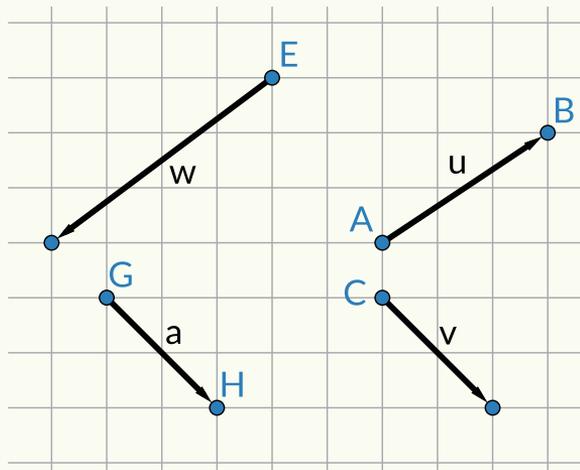
Kalian dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk melakukan operasi vektor. https://www.geogebra.org/

Refleksi

1. Bagaimana menyatakan vektor?
2. Berapa cara menyatakan arah?
3. Apa itu vektor ekuivalen?
4. Bagaimana membuat vektor dalam sistem koordinat?
5. Bagaimana menentukan vektor dalam sistem koordinat?
6. Ada berapa jenis vektor?
7. Sifat apa saja yang dipenuhi oleh penjumlahan vektor?
8. Bagaimana cara melakukan penjumlahan vektor?
9. Bagaimana cara melakukan pengurangan vektor?
10. Bagaimana cara melakukan perkalian skalar dengan vektor?

Uji Kompetensi

1. Suatu vektor memiliki ujung di $A(3, -6,0)$ dan pangkal di $B(5, 0, 8)$.

   Nyatakan vektor **AB** dalam komponen-komponennya dan tentukan panjang vektor.
2. Apakah penjumlahan dua vektor dengan besar berbeda dapat menghasilkan vektor nol?
3. Apakah penjumlahan tiga vektor dengan besar berbeda dapat menghasilkan vektor nol?
4. Kalian naik sepeda dengan kelajuan 2 m/detik ke utara. Angin bertiup ke selatan dengan kelajuan 0,4 m/detik. Ke arah mana kalian bergerak dan berapa kelajuannya?
5. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Gambarkan secara grafis dan tentukan komponen-komponennya dari 2 **CD** + **AB** - 3**EF** – 2**GH**.

   Gunakan kertas berpetak untuk menggambar.

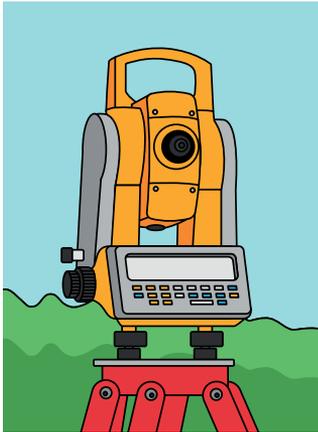
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab 4

Perbandingan Trigonometri

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

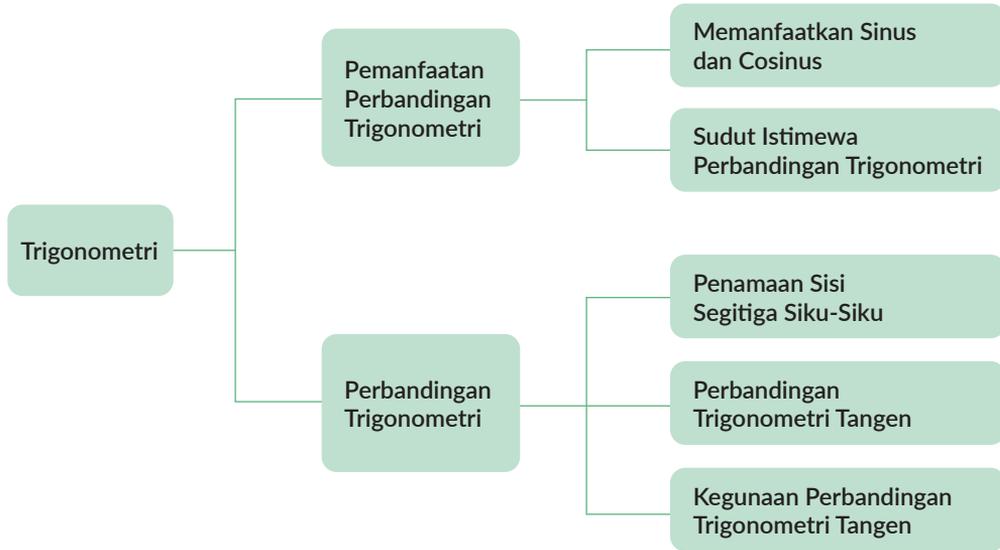
1. Menamai sisi segitiga dengan tepat sesuai dengan sudut segitiganya.
2. Menerapkan perbandingan trigonometri untuk mencari panjang sisi segitiga yang tidak diketahui.
3. Membuktikan sinus dan cosinus dari suatu sudut pada segitiga siku-siku berupa rasio, bukan nilai tetap.
4. Memberikan penjelasan mengapa nilai dari perbandingan trigonometri suatu sudut bisa selalu sama dan dapat dihitung dengan kalkulator.
5. Memberikan bukti sinus dan cosinus sudut komplementer adalah sama besarnya.
6. Mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri (sin θ, cos θ, tan θ).

Gambar 4.1 Theodolit

Gambar 4.2 Menggunakan Theodolit
Suwichan/pixaby.com

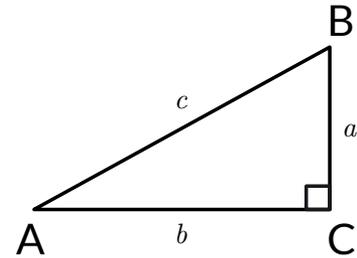
Alat pada Gambar 4.1 bernama Theodolit dan merupakan salah satu alat utama yang digunakan oleh pengukur tanah. Dengan alat ini, pengukur tanah dapat mencari tingkat kelandaian jalanan, tinggi sebuah tiang, dan bahkan tinggi gedung pencakar langit! Penggunaan Theodolit ini dalam kehidupan sehari-hari memanfaatkan penerapan konsep perbandingan trigonometri.

Trigonometri adalah studi pola bermakna mengenai hubungan antara sudut dan sisi segitiga. Trigonometri berasal dari kata Yunani *trigono*, yang berarti segitiga, dan *metri*, yang berarti pengukuran. Pada bab 4, kalian akan mempelajari jenis-jenis perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku dan menyelesaikan permasalahan matematika dalam kehidupan sehari-hari menggunakan prinsip perbandingan trigonometri.

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
Perbandingan trigonometri, nilai perbandingan/ nilai rasio, sisi miring (hipotenusa), sisi depan, sisi samping, sinus, cosinus, tangen, θ (theta).	• Apa hubungan antara sisi dan sudut pada segitiga siku-siku? • Apakah perbandingan trigonometri berlaku pada segala jenis segitiga? • Mengapa perbandingan trigonometri berguna? • Permasalahan sehari-hari apa yang dapat dan tidak dapat dipecahkan dengan perbandingan trigonometri?

Peta Konsep

Untuk siap mempelajari perbandingan trigonometri, **kalian perlu mengingat teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga siku-siku.**

Pada segitiga siku-siku berlaku persamaan berikut:

$a^2 + b^2 = c^2$

Gambar 4.3 Teorema Pythagoras

Kalian juga perlu mengingat mengenai rasio (perbandingan).

Gambar 4.4
Pohon dan Penggaris

Apa itu rasio atau nilai perbandingan?

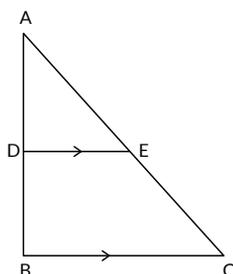
Rasio adalah nilai/bilangan yang menjelaskan keterkaitan antara dua hal.

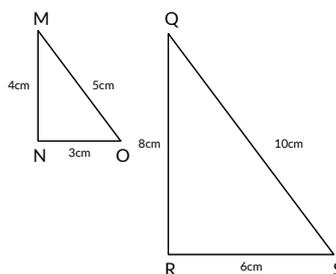
Misalnya diketahui nilai perbandingan tinggi penggaris dengan pohon adalah 1/100. Jika tinggi penggaris 3 cm dan tinggi bayangan 6 cm, kita bisa mengambil kesimpulan bahwa tinggi pohon adalah 300 cm dan tinggi bayangan pohon adalah 600 cm.

Yang terakhir, kalian juga perlu mengingat konsep kesebangunan segitiga. Konsep ini juga mempunyai hubungan dekat dengan konsep rasio perbandingan.

Dua segitiga dapat memenuhi syarat kesebangun jika:

- Ketiga sudut pada segitiga sama besarnya atau
- Ketiga sisi segitiga sebanding (mempunyai nilai rasio yang sama)

Segitiga ADE dan segitiga ABC adalah dua segitiga yang sebangun.
Segitiga MNO dan segitiga QRS juga merupakan contoh segitiga sebangun.

Gambar 4.5
Segitiga Sebangun 1

M
4cm
5cm
N
3cm
O
Q
8cm
10cm
R
6cm
S

Gambar 4.6
Segitiga Sebangun 2

Ayo Berdiskusi

Mengapa segitiga-segitiga pada Gambar 4.5 dan 4.6 dikatakan sebangun?

A. Perbandingan Trigonometri

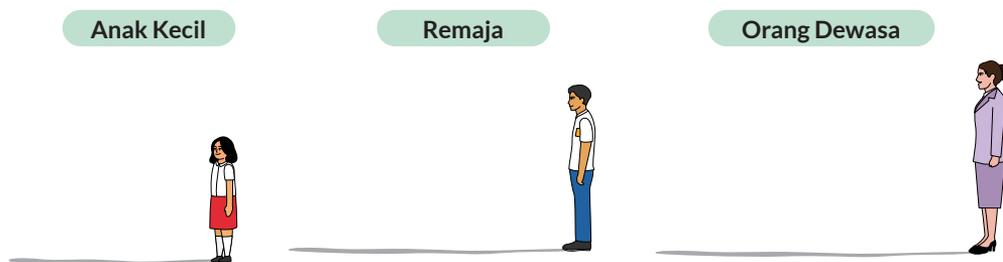
Panjang garis keliling bumi adalah 40,030 km. Tahukah kalian kalau 2.000 tahun yang lalu seorang matematikawan telah menemukan perkiraan bilangan yang sama? Tonton video dengan memindai QR *code*-nya dan lihat aksi nyata manfaat perbandingan trigonometri. Kalian bisa menyetel fungsi terjemah otomatis dari YouTube jika dirasa perlu.

Pindai QR code berikut untuk menonton video.

Bayangan dan perbandingan sudut bayangan telah terbukti bermanfaat dalam kisah Eratosthenes yang kalian tonton. Ayo sekarang kalian lakukan kegiatan eksplorasi dengan perbandingan bayangan.

Pindai QR code berikut untuk membaca ringkasan terjemahan video mengenai Eratosthenes.

Eksplorasi 4.1

Gambar 4.7 menunjukkan tiga orang yang mempunyai tinggi berbeda-beda sedang berdiri pada posisi yang sama membelakangi sumber cahaya. Setiap orang membentuk bayangan dengan panjang yang berbeda-beda. Yang lebih tinggi akan menghasilkan bayangan yang lebih panjang.

Gambar 4.7 Bayangan Tiga Orang

Ayo Mencoba

Kalian bisa melakukan kegiatan berikut dengan mengumpulkan data bayangan dan tinggi badan tiga orang yang berbeda secara mandiri. Pastikan kalian punya waktu yang cukup untuk melakukan percobaan mandiri ini.

1. Gunakan penggaris dan ukur tinggi badan dan bayangan anak kecil, remaja, dan orang dewasa pada Gambar 4.7.

	Anak kecil	Remaja	Orang dewasa
Tinggi badan	_____ cm	_____ cm	_____ cm
Tinggi bayangan	_____ cm	_____ cm	_____ cm

2. Cari nilai perbandingan tinggi badan dan bayangan setiap orangnya. Sebelum melakukan penghitungan matematikanya, coba pikirkan apakah nilai perbandingannya akan sama atau berbeda?

Nilai perbandingan tinggi badan dan bayangan		
Anak kecil	Remaja	Orang dewasa

Nilai perbandingan ditemukan dengan membagi tinggi badan dengan tinggi bayangan.

Apakah yang kalian temukan? Menurutmu, mengapa bisa demikian?

3. Tarik garis dari ujung kepala setiap orangnya ke ujung kepala bayangannya.
4. Gunakan busurmu dan ukur sudut yang terbentuk antara bayangan dan garis miring yang kalian tarik pada langkah 3.
   Apakah yang kalian temukan? Menurutmu, mengapa bisa demikian?

	Anak kecil	Remaja	Orang dewasa
Besaran Sudut			

5. Jika kalian mengetahui tinggi anak kecil, apakah tinggi orang dewasa dapat dicari?

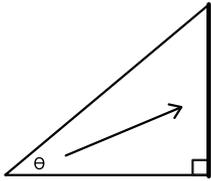
Ayo Berdiskusi & Bekerja Sama

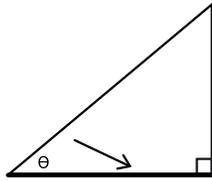
Diskusikanlah jawaban diskusi dan pastikan setiap dari kalian menjelaskan pemikiran kalian untuk bekerja sama mencari jawaban yang tepat.

1. Penamaan Sisi Segitiga Siku-siku

Prinsip nilai perbandingan yang digunakan untuk mencari tinggi orang dewasa dapat diterapkan untuk mencari tinggi sebuah gedung pencakar langit maupun tinggi gunung. Perbandingan trigonometri secara sederhana adalah perbandingan nilai segitiga siku-siku yang istimewa dan berguna. Ketiga garis dalam segitiga siku-siku mempunyai nama tertentu.

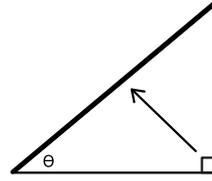
Tiga nama untuk setiap sisi segitiga adalah:

1. Sisi depan

Gambar 4.8 Sisi Depan

Definisi: sisi yang berada tepat di seberang sudut θ.

2. Sisi samping

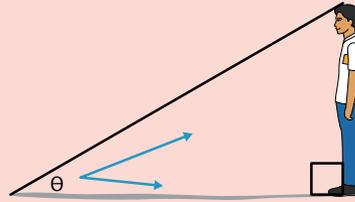
Gambar 4.9 Sisi Samping

Definisi: sisi yang berada di samping sudut θ.

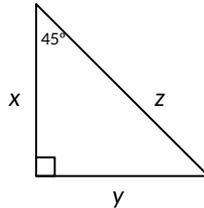
3. Sisi miring (hipotenusa)

Gambar 4.10 Sisi Miring

Definisi: sisi yang berada di seberang sudut siku-siku.

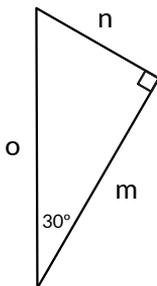
Ayo Berpikir Kritis

Menggunakan contoh di kegiatan eksplorasi, yang mana sisi depan, sisi samping, dan sisi miring segitiganya?

Gambar 4.11 Contoh Bayangan

Latihan 4.1

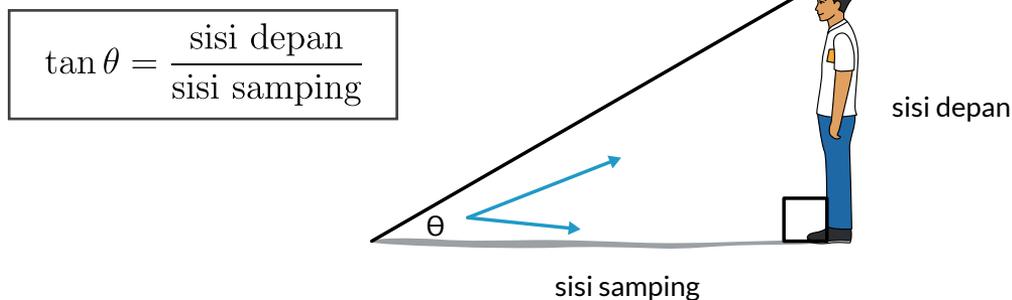
1. Tentukan nama yang tepat untuk setiap sisi segitiga siku-siku pada Gambar 4.12!

Gambar 4.12
Segitiga dengan Sisi XYZ

2. Putri menamakan sisi segitiga sebagai berikut:

Sisi depan adalah sisi m.
Sisi samping adalah sisi n.
Sisi miring (hipotenusa) adalah sisi o.
Coba tuliskan anjuran untuk Putri memperbaiki pemahamannya! Dalam anjuran kalian, pastikan ada penjelasan alasannya.

2. Satu Jenis Perbandingan Trigonometri: Tan θ

Pada kegiatan eksplorasi, kalian sudah mencari nilai perbandingan tinggi badan dan bayangan setiap orangnya. Ditemukan bahwa nilai perbandingannya sama (yaitu sekitar 0,57) dan sudut yang terbentuk juga sama (30^{o}).

Nilai perbandingan ini mempunyai nama khusus, yaitu **tangen (disingkat tan)**. Tan suatu sudut dapat ditemukan dengan membagi panjang sisi depan dan sisi samping segitiga.

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

Gambar 4.13 Tangen di Segitiga

Catatan: ada dua jenis perbandingan trigonometri lainnya, yaitu sinus dan cosinus. Kalian akan mempelajarinya lebih dalam di subbab 2.

Pada contoh yang kalian kerjakan, tan 30º = 0,57.
Hasil nilai tan 30º adalah nilai perbandingan.

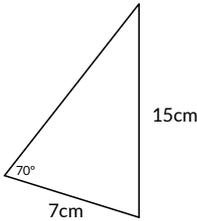
Ayo Mengingat Kembali

Nilai perbandingan (rasio) adalah nilai yang didapat dari hubungan proporsi dengan hal lainnya/nilai keterkaitan antar dua hal.

Ayo Berpikir Kreatif

Nilai perbandingan apa lagi yang berguna dalam kehidupan sehari-hari kalian? (Misalnya ketika memasak)

Latihan 4.2

1.

Apakah kalian dapat mencari nilai perbandingan tan 70°? Jelaskan Mengapa!

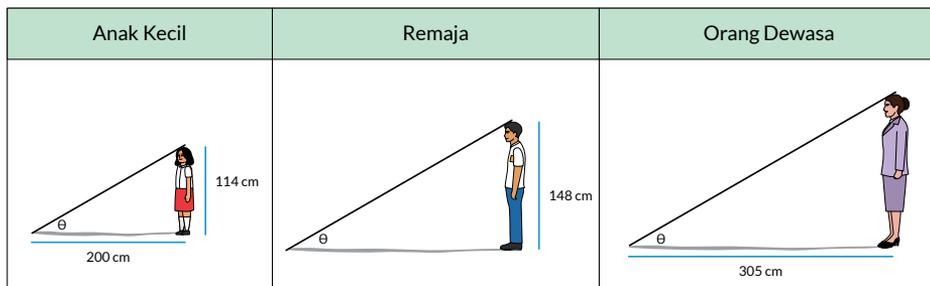
2. Bagilah tugas dengan teman sekelasmu untuk membuat 3 segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya sebesar 40°. Pastikan ukuran ketiga segitiga tersebut berbeda-beda. Tandai sudut siku-siku dan sudut 40o serta nama setiap sisinya.

Ayo Bekerja Sama

Jika ada lebih dari 3 orang di kelompokmu, berikan tugas umum kepada anggota keempat seperti "pemeriksa akhir" yang bertugas memeriksa ketepatan hasil gambar segitiga.

3. Carilah nilai perbandingan sisi depan dan sisi samping sudut 40° menggunakan salah satu segitiga yang sudah dibuat.
4. Carilah nilai tan 40° menggunakan salah satu segitiga yang sudah dibuat.
5. Diskusikan dengan teman sekelasmu: Apakah jawaban nomor 2 dan 3 setiap dari kalian sama? Apakah nilai tan 40° berupa nilai perbandingan? Jelaskan alasanmu!

3. Kegunaan Perbandingan Trigonometri Tan θ

Dengan mengetahui nilai perbandingan tinggi anak kecil dan bayangannya (tan θ), kalian dapat mencari panjang bayangan anak remaja dan tinggi orang dewasa yang sebenarnya.

Gambar 4.14 Segitiga-Segitiga Sebangun dari Bayangan Tiga Orang

Ketiga gambar di halaman sebelumnya adalah segitiga sebangun, sehingga dapat ditulis:

$$\frac{\text{tinggi anak kecil}}{\text{panjang bayangan anak kecil}} = \frac{\text{tinggi anak remaja}}{\text{panjang bayangan remaja}} = \frac{\text{tinggi orang dewasa}}{\text{panjang bayangan orang dewasa}}$$

Untuk mencari panjang bayangan remaja:

Cara pertama: menggunakan perbandingan segitiga sebangun.

$$\frac{\text{tinggi anak kecil}}{\text{panjang bayangan anak kecil}} = \frac{\text{tinggi anak remaja}}{\text{panjang bayangan anak remaja}}$$

$$\frac{114 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} = \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}}$$

$$x \text{ cm} = \frac{148 \text{ x } 200 \text{ cm}}{114 \text{ cm}}$$

$$x \text{ cm} = \frac{29.600 \text{ cm}}{114 \text{ cm}}$$

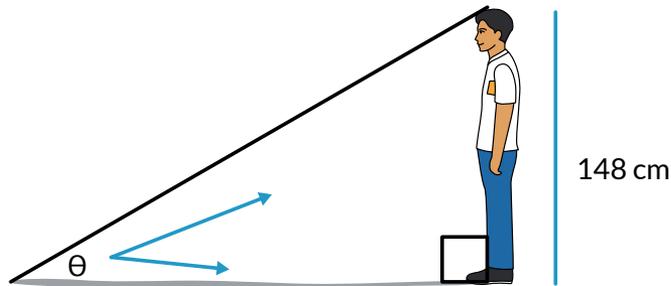
$$x \text{ cm} = 259.65 \text{ cm}$$

Panjang bayangan remaja adalah 259.65 cm.

Cara kedua: memanfaatkan perbandingan trigonometri.

Diketahui bahwa tan 30º = 0,57.

$$\tan\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

Remaja

$$\tan\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

$$\tan\theta = \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}}$$

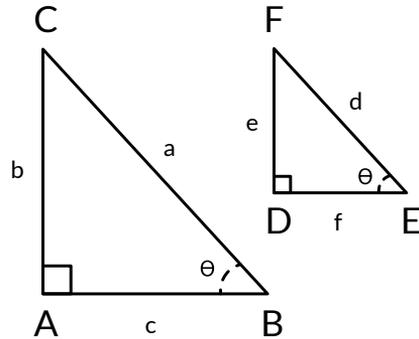
$$\tan 30^\circ = \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}}$$

$$0.57 = \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}}$$

$$x = 259.65 \text{ cm}$$

Latihan 4.3

1. Gunakan contoh yang baru disampaikan untuk mencari tinggi orang dewasa.
   a. Cari tinggi orang dewasa dengan menggunakan perbandingan segitiga sebangun.
   b. Cari tinggi orang dewasa dengan memanfaatkan perbandingan trigonometri.

2. Diketahui kedua segitiga di samping adalah segitiga sebangun dengan perbandingan sisi tan θ = 0,47;
   a. Jika sisi b = 12 cm, hitung panjang sisi c!
   b. Diketahui segitiga FDE mempunyai ukuran $\frac{1}{3}$ dari segitiga CAB. Hitung panjang sisi c dan sisi f!

Latihan 4.4

Soal Pemahaman

1. Diketahui $\tan \angle A = \dfrac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \dfrac{1}{4}$.

   Gambarlah sebuah segitiga siku-siku yang memenuhi nilai perbandingan tersebut. Berikan label dan panjang sisi depan serta sisi sampingnya dalam cm!

2. Cari panjang x !

Hint

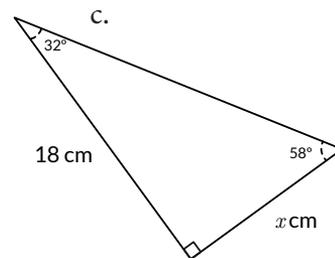
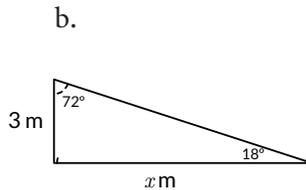
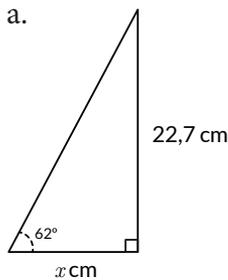
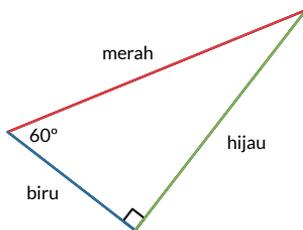
Kalian mungkin perlu menggunakan kalkulator untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Ayo Menggunakan Teknologi

Hati-hati jangan salah satuannya!

- Bisa menggunakan kalkulator
- Bisa menggunakan website *GeoGebra*

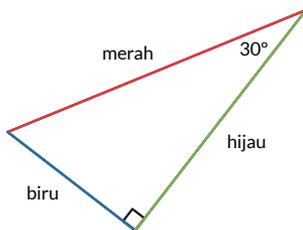
Ayo Berpikir Kreatif

Ada cara untuk mencari panjang x tanpa menggunakan kalkulator sama sekali. Apakah kalian tahu caranya?

3. Soal ini terdiri dari empat bagian.

Bagian pertama:

Perhatikan segitiga berikut dan tentukan nama sisinya berdasarkan sudut 60°!

a. Sisi berwarna merah adalah sisi___________.

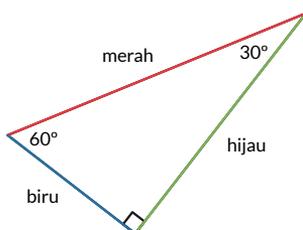
b. Sisi berwarna hijau adalah sisi ___________.

c. Sisi berwarna biru adalah sisi ___________.

Bagian kedua:

Segitiga berikut adalah segitiga yang sama dengan segitiga pada soal nomor pertama. Sekarang, tentukan nama sisinya berdasarkan sudut 30^{o}!

a. Sisi berwarna merah adalah sisi ___________.

b. Sisi berwarna hijau adalah sisi ___________.

c. Sisi berwarna biru adalah sisi ___________.

Bagian ketiga:

Segitiga berikut adalah segitiga yang sama dengan segitiga pada soal nomor pertama dan kedua. Sekarang, tentukan nama sisi berdasarkan sudut yang ditentukan!

a. Sisi depan sudut 30^{o} berwarna ________.

b. Sisi depan sudut 60^{o} berwarna ________.

c. Sisi samping sudut 30^{o} berwarna ________.

Bagian keempat:

Gunakan jawaban kalian pada soal nomor pertama untuk menyelesaikan permasalahan berikut.

a. Apakah sisi depan sudut 30^{o} dan 60^{o} sama atau berbeda? Mengapa demikian?

b. Apakah sisi samping sudut 30^{o} dan 60^{o} sama atau berbeda? Mengapa demikian?

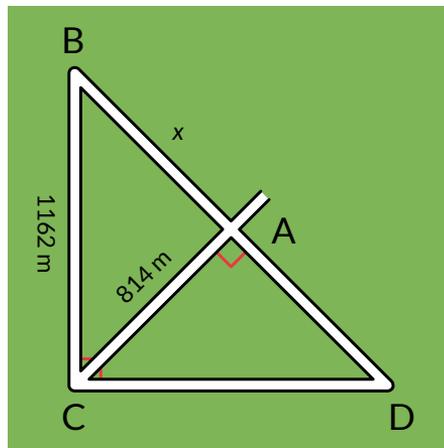
c. Apakah sisi miring sudut 30^{o} dan 60^{o} sama atau berbeda? Mengapa demikian?

Soal Aplikasi

4. Diketahui tan $\angle A = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{4}{3}$.

   a. Gambarlah dua segitiga siku-siku yang berbeda, namun tetap memenuhi nilai perbandingan tersebut.

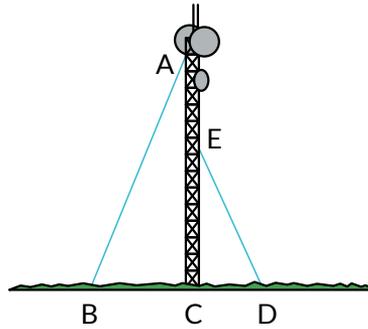
   b. Apakah ada lebih dari dua segitiga yang memenuhi nilai perbandingan tersebut? Jelaskan alasanmu.

5. Seorang ahli perencana kota perlu membangun jalan dari titik B ke titik A.

   a. Cari panjang jalan yang perlu ia rencanakan untuk menghubungkan titik B ke A.

   b. Cari nilai perbandingan antara jarak titik C ke A dengan jarak titik C ke B. Catatan: nilai Ini adalah nilai perbandingan trigonometri sinus.

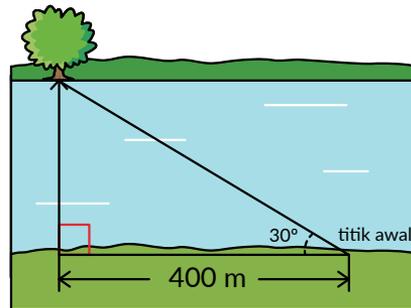
   c. Cari nilai perbandingan antara jarak titik A ke B dengan jarak titik C ke B. Catatan: nilai ini adalah nilai perbandingan trigonometri cosinus.

   d. Jika segitiga ABC dan segitiga ADC sebangun, cari panjang CD!

6. Seorang teknisi sedang memperbaiki sebuah menara pemancar yang mempunyai tinggi 150 meter. Jarak antara titik B dan D adalah 125 meter.
   a. Jika sudut yang terbentuk oleh kedua tangga adalah 60o, hitung jarak BC!
   b. Cari juga jarak CD.

Soal Penalaran

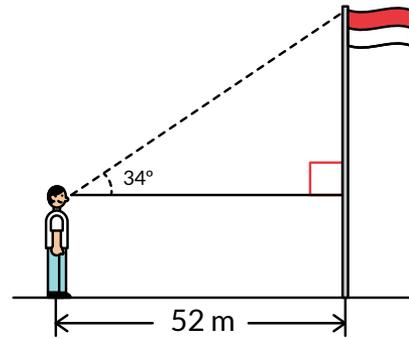
7. Standar sudut mendarat pesawat yang direkomendasikan untuk kenyamanan dan kemulusan adalah 3°. Jika pesawat sedang berada di ketinggian 600 meter, berapa jarak antara posisi pesawat sekarang dengan posisi pendaratannya yang ideal?

kalian mungkin perlu menggambar segitiga siku-siku berdasarkan konteks pertanyaan terlebih dahulu.

8. Seorang ahli bangun perlu mengukur jarak sungai untuk mempersiapkan pembangunan jembatan. Pertama, ahli bangun tersebut memberikan tanda di titik awalnya dan melihat ada pohon besar di seberang sungai. Ia kemudian berjalan sambil mengukur jarak, sampai posisinya sejajar dengan pohon. Jarak yang baru saja ia tempuh adalah 400 meter. Ia kemudian kembali ke titik awal dan mengukur sudut perputaran arah ke posisi pohon dengan theodolit. Ia mendapatkan sudut sebesar 31°.

   a. Tentukan panjang rancangan jembatan yang seharusnya berdasarkan informasi yang ada!
   b. Untuk memastikan penghitungannya tepat, ahli bangun memilih titik awal yang berbeda dan mengukur jarak serta sudutnya. Ia mendapatkan sudut perputaran 36° serta jarak 330,8 meter. Tanpa melakukan penghitungan matematika, berikan penjelasan apakah strategi yang digunakan ahli bangun tersebut tepat atau tidak tepat.

9. Dimas sedang mencoba mencari tinggi tiang bendera. Dengan bantuan teman dan alat busur, ia memperkirakan sudut yang terbentuk antara kepala dan ujung tiang bendera adalah 34°.

a. Jarak antara Dimas dan tiang bendera adalah 52 m. Cari panjang sisi depan berdasarkan sudut dan jarak yang diketahui!

b. Teman Dimas beranggapan bahwa jawaban di bagian a merupakan tinggi tiang bendera yang sesungguhnya. Dimas tidak setuju dengan pernyataan itu. Bagaimana pendapat kalian? Jelaskan alasannya.

Ayo Berpikir Kritis

Kadang-kadang, hasil penghitungan perlu dikaji ulang sesuai konteksnya supaya jawaban yang diperoleh dapat menjawab pertanyaan yang sesungguhnya.

Materi Pengayaan: Proyek Membuat Clinometer

Pada subbab pertama, kalian telah melihat kegunaan perbandingan trigonometri untuk mengukur tinggi objek yang besar tanpa harus mengukurnya secara langsung. Kalian akan merakit sebuah alat bernama clinometer yang berfungsi mengukur sudut kemiringan, elevasi (tingkat kenaikan), atau depresi (tingkat penurunan). Kemudian, kalian akan melakukan percobaan mengukur objek di lingkunganmu.

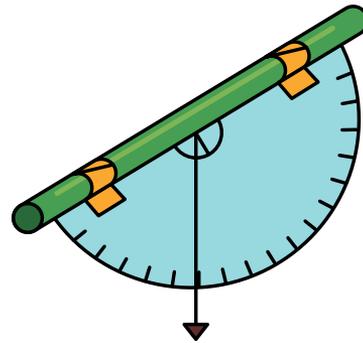
sudut elevasi
sudut pandang horizontal
sudut depresi

Gambar 4.15
Sudut Elevasi dan Sudut Depresi

Untuk membuat clinometer, siapkan:

- Selotip dan gunting
- 1 sedotan
- 1 busur
- 1 tali
- 1 panah dari karton

Langkah membuat clinometer:

- Lekatkan panah karton ke ujung tali.
- Gunting tali dengan panjang secukupnya.
- Tempel tali di tengah-tengah busur.
- Gunting sedotan (sesuaikan panjang dengan panjang busur).
- Gunakan selotip dan tempel sedotan pada bagian datar busur.

Gambar 4.16
Clinometer Sederhana

Ayo Berpikir Kritis

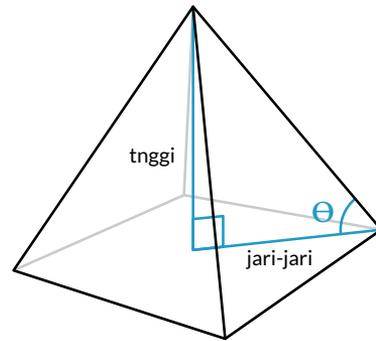
Coba pikirkan dan tuliskan cara kalian menghitung sudut elevasi atau sudut depresinya!

Untuk kegiatan mengukur, cobalah lakukan beberapa kali dengan berbagai objek. Terapkan perbandingan trigonometri untuk mencari tinggi objeknya. Jangan lupa kalau sudut dihitung bermula dari garis pandang horizontal yang menggunakan clinometer!

B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri

Gambar 4.17 Piramida di Mesir
Sumber: Jeremy Bishop/unsplash.com

Piramida adalah bangunan menakjubkan yang dibangun sekitar 4.500 tahun yang lalu. Bayangkan banyaknya pekerja dan persiapan yang diperlukan untuk membuat bangunan seperti ini, tanpa tersedianya alat canggih seperti zaman sekarang.

Jika digambar secara sederhana, ukuran piramida ditentukan oleh tinggi, panjang jari-jari, dan besaran sudut seperti pada Gambar 4.32. Segitiga yang ada di gambar adalah segitiga siku-siku. Pada Piramida Giza, piramida yang tertua dan terbesar di dunia, sudut θ adalah sebesar 41°.

Gambar 4.18
Tinggi dan Jari-jari Piramida

Eksplorasi 4.2

Sekarang, gunakan imajinasimu untuk menjawab beberapa pertanyaan ini.

- Tandai sisi segitiga siku-siku dengan nama berikut: sisi depan, sisi samping, dan sisi miring (hipoenusa).
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan tinggi piramida?
- Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan tinggi piramida?
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan panjang jari-jarinya?
- Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan panjang jari-jarinya?

Pikirkan jawaban kalian untuk pertanyaan berikut, jika perlu kalian boleh menggambar bayangan kalian untuk membantu menjawab.

Setelah berpikir dan bekerja mandiri, diskusikan jawaban kalian bersama dengan teman sekelas.

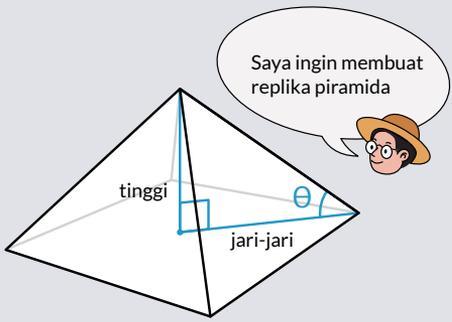
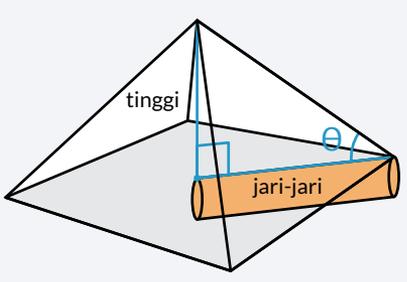
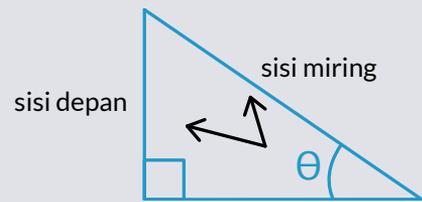
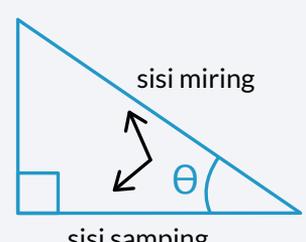
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi sampingnya (tan θ)?
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring segitiga siku-siku?
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring segitiga siku-siku?

1. Perbandingan Trigonometri di Piramida

Pada pembuka bab, selain dari perbandingan nilai tangen, kalian juga diminta memperhitungkan nilai perbandingan lainnya.

- Nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring yang disebut juga dengan sinus.
- Nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring yang disebut juga dengan cosinus.

Simak dua skenario berikut untuk melihat penerapan perbandingan sinus dan cosinus dalam piramida.

Seorang pengagum piramida ingin membuat replika piramida. Ia tahu $\theta = 41^\circ$ dan panjang rusuk piramida adalah 600m. Untuk membangun replika, ia juga perlu mengetahui tinggi piramidanya.	Seorang sejarawan ingin membuat lorong bawah tanah agar ia dapat masuk ke bagian tengah piramida. Ia mengetahui bahwa $\theta = 41^\circ$.
Gambar 4.19 Membuat replika piramida	**Gambar 4.20** Membuat lorong bawah tanah

Perbandingan trigonometri sinus (biasa disingkat sin) adalah nilai perbandingan antara sisi depan dan sisi miring sudut θ segitiga siku-siku.

$$\sin\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$$

Dalam permasalahan piramida, perbandingan trigonometri sin dapat membantu kita mencari tinggi piramida.

$$\sin 41^\circ = \frac{\text{tinggi piramida (sisi depan)}}{\text{rusuk piramida (sisi samping)}}$$
$$\sin 41^\circ = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$$
$$0{,}66 = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$$
$$x = 0{,}66 \text{ x } 600 \text{ m}$$
$$x = 369 \text{ m}$$

Dengan menggunakan kalkulator, kita menemukan bahwa sin 41° = 0,66 (dibulatkan).

Perbandingan trigonometri cosinus (biasa disingkat cos) adalah nilai perbandingan antara sisi samping dan sisi miring sudut θ pada segitiga siku-siku.

$$\cos\theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$$

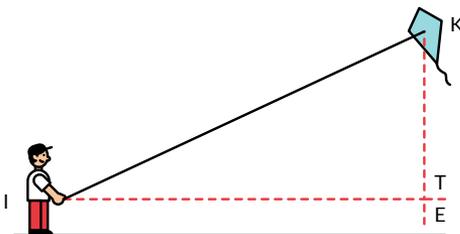
Dalam permasalahan piramida, perbandingan trigonometri cos dapat membantu kita mencari jari-jari dasar piramida.

Dengan menggunakan kalkulator, kita menemukan bahwa cos 41° = 0,75 (dibulatkan).

$$\cos 41^\circ = \frac{\text{jari-jari dasar piramida (sisi samping)}}{\text{rusuk piramida (sisi miring)}}$$
$$\cos 41^\circ = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$$
$$0{,}75 = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$$
$$x = 0{,}75 \text{ x } 600 \text{ m}$$
$$x = 450 \text{ m}$$

Panjang lorong bawah tanah yang perlu digali adalah 450 m.

Ayo Berefleksi

Apa perbedaan antara perbandingan trigonometri sin, cos, dan tan?
Apa persamaan antara perbandingan trigonometri sin, cos, dan tan?

Gambar 4.21 Permasalahan Layang-layang

Wanimbo sedang bermain layangan. Ia berhasil menaikan layangan sampai ketinggian 3,5 m sambil memegang ujung layangan pada ketinggian 60 cm dari permukaan. Layangannya juga membentuk sudut ∠KIT sebesar 25°. Tinggi badan Wanimbo. Coba cari panjang tali layangan yang sudah diulurkan Wanimbo!

Ayo Berpikir Kritis

Pikirkan, perbandingan trigonometri mana (di antara sin, cos, atau tan) yang akan bermanfaat untuk menyelesaikan permasalahan ini?

Simak jawaban salah seorang siswa di SMA 78 Kota Sukaberkah bernama Surya (fiktif): Saya perlu memanfaatkan perbandingan trigonometri sinus karena saya mengetahui ketinggian layangan dan mencari panjang tali layangan.

$$\sin 20^\circ = 0{,}34 = \frac{\text{tinggi layangan}}{\text{panjang tali layangan}}$$
$$0{,}34 = \frac{3{,}5 \text{ m}}{x \text{ m}}$$
$$x \text{ cm} = 10{,}29 \text{ m}$$

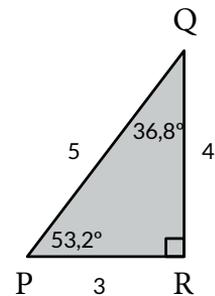
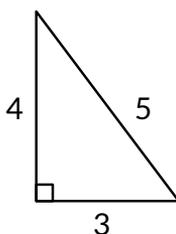
Ayo Berdiskusi & Bekerja Sama

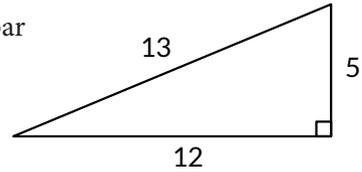
Jawaban Surya tidak tepat. Bersama dengan teman sekelompokmu, diskusikan apa yang tidak tepat dari solusi Surya. Pastikan setiap anggota mengerti apa yang salah kemudian carilah jawaban yang benar.

Latihan 4.5

1. Sebuah segitiga siku-siku PQR, mempunyai besaran ∠P = 53,2° dan besaran ∠Q = 36,8°.
   a. Cari nilai sin 53,2! Uraikan cara dan proses berpikirmu
   b. Nilai perbandingan panjang sisi QR dan QP sama dengan nilai ________.

      i. Cos 53,2 ii. Cos 36,8

2.

   Jika ∠A = θ dan cos θ = $\frac{4}{5}$, tandai ∠A pada gambar segitiga di samping. Jika ∠M = θ dan sin θ = $\frac{5}{13}$, tandai ∠M pada gambar segitiga di samping.

3. Jika $\angle M = \theta$ dan $\sin \theta = \frac{5}{13}$, tandai $\angle M$ pada gambar segitiga di samping.

4. Kerjakan secara mandiri:

   Tuliskan arti **sin θ sebagai nilai perbandingan** dengan kata-kata kalian sendiri! Jika dirasa perlu, kalian boleh menambahkan gambar.

   Kerjakan bersama dua atau tiga teman sekelas:
   Bandingkan jawabanmu dengan teman sekelasmu. Berikan masukan untuk definisi temanmu atau/dan merevisi definisimu sendiri.

   Kerjakan bersama-sama satu kelas (dipimpin guru):
   Bagikan secara lisan definisi yang menurutmu baik kepada seluruh kelas. Guru akan merangkum definisi dan kegiatan ini.

5. Kerjakan secara mandiri:

   Tuliskan arti **cos θ sebagai nilai perbandingan** dengan kata-kata kalian sendiri! Jika dirasa perlu, kalian boleh menambahkan gambar.

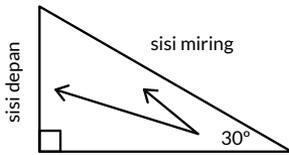
   Kerjakan bersama teman sekelas:
   Bandingkan jawabanmu dengan teman sekelasmu. Berikan masukan untuk definisi temanmu atau/dan merevisi definisimu sendiri.

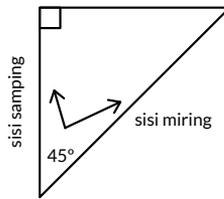
   Kerjakan bersama-sama satu kelas (dipimpin guru):
   Bagikan secara lisan definisi yang menurutmu baik kepada seluruh kelas. Guru akan merangkum definisi dan kegiatan ini.

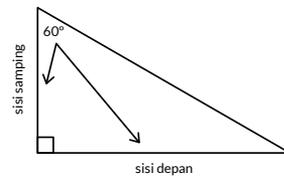
2. Tiga Serangkai Perbandingan Trigonometri

Ketika matematikawan zaman kuno mempelajari segitiga, mereka menemukan pola nilai perbandingan (rasio) panjang sisi segitiga siku-siku yang sudah kalian pelajari di subbab lalu dan subbab ini. Ada tiga perbandingan trigonometri yang sudah kalian pelajari yaitu sinus, cosinus, dan tangen.

$$\sin\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

sin 30° = 0,5

Gambar 4.22
Sinus 30°

cos 43° = 0,73

Gambar 4.23
Cosinus 43°

tan 55° = 1.43

Gambar 4.24
Tangen 55°

Ayo Mengingat Kembali

Apa yang dimaksud dengan sin, cos, tan sebagai nilai perbandingan?

Ayo Menggunakan Teknologi

Coba simulasi perbandingan trigonometri di *GeoGebra*. Kalian bisa mengaksesnya melalui tautan berikut: bit.ly/simulasitrigonometri

Pindai QR code disamping untuk diteruskan ke simulasi pada aplikasi *GeoGebra*.

- Geser panel sampai kalian mendapatkan sudut 40°.
- Tarik salah satu titik putih pada segitiga untuk memperbesar/ memperkecil ukurannya.
- Perhatikan nilai perbandingan di bagian atas, apakah nilainya sama atau berubah? Jelaskan alasan kalian kepada teman sekelompok.

3. Sudut Istimewa Perbandingan Trigonometri

Sudut istimewa dalam perbandingan trigonometri adalah sudut-sudut yang nilai perbandingannya dapat ditentukan secara eksak. Sudut istimewa akan sangat berguna dan banyak digunakan pada pelajaran Fisika.

Eksplorasi 4.3

Kalian akan mengkapi tabel berikut dengan nilai perbandingan trigonometrinya.

	30^o	45^o	60^o
sin			
cos		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
tan			$\sqrt{3}$

Ayo Bekerja Sama

Coba bagi tugas saling memeriksa pekerjaan kalian. Jika jawabannya berbeda, coba cari apa yang kurang tepat dan cari solusinya.

Simak panduan berikut.

Mencari nilai perbandingan trigonometri 30^o dan 60^o:

1. Gambar sebuah segitiga sama sisi dengan panjang setiap sisinya 2 satuan. Beri variabel A, B, C untuk masing-masing sudutnya.
2. Belah segitiga tersebut menjadi dua bagian dengan garis vertikal di tengah-tengah bangunnya.
3. Gambar ulang satu bagian segitiganya dan tandai panjang sisi dan besaran sudut yang diketahui.
4. Cari panjang sisi yang belum diketahui menggunakan teori Pythagoras.
5. Cari nilai perbandingan sin, cos, dan tan untuk sudut istimewa 30^o dan 60^o!

Mencari nilai perbandingan trigonometri 45^o:

1. Gambar sebuah **segitiga siku-siku** sama kaki dengan panjang 1 satuan.
2. Cari panjang sisi miringnya menggunakan **teori Pythagoras**.
3. Cari nilai perbandingan sin, cos, dan tan untuk sudut istimewa 45^o!

Latihan 4.6

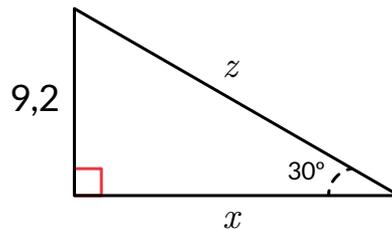
1. Sebuah segitiga siku-siku sama kaki memiliki panjang dua sisinya 8cm. Berapa panjang sisi miringnya?
2. Sebuah segitiga siku-siku mempunyai sudut 30° dan 60°.
   a. Tuliskan panjang setiap sisi segitiganya yang memungkinkan.
   b. Nia berkata segitiga ini memiliki panjang sisi seperti berikut: $5\sqrt{3}$ cm, 5 cm, dan 15 cm. Menurut kalian, apakah panjang sisi yang dikemukakan Nia memungkinkan? Jelaskan mengapa.

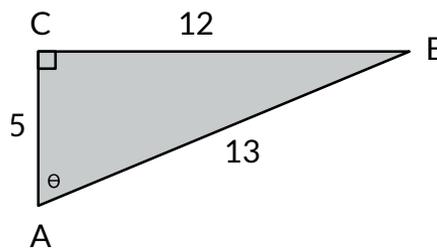
Ayo Mandiri

Secara cepat, coba hitung panjang sisi miringnya jika panjang dua sisi lainnya 10 cm.

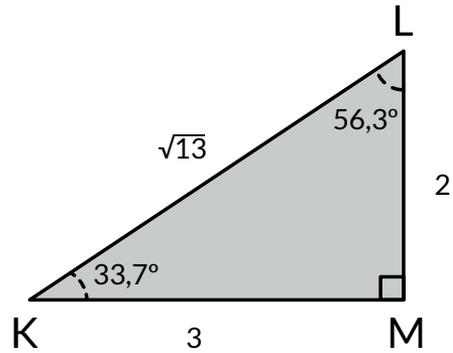
Latihan 4.7

Soal Pemahaman

1. Cari panjang sisi x dan z !

2. Segitiga ABC memiliki panjang sisi sebagai berikut:

   Sisi AC = 5
   Sisi CB = 12
   Sisi AB = 13

   a. Tentukan nama setiap sisi segitiga siku-siku berikut.
   b. Cari hasil sin θ!
   c. Cari hasil cos θ!

Soal Aplikasi

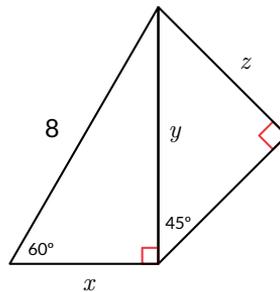
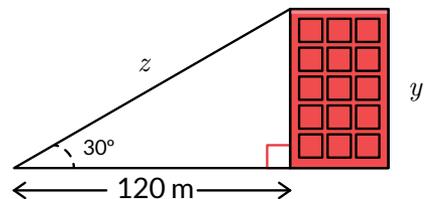
3. KLM adalah segitiga dengan besar sudut dan panjang seperti pada gambar di samping. KLM adalah segitiga dengan besar sudut dan panjang seperti pada Gambar di samping.

   a. Tentukan hasil perbandingan trigonometri berdasarkan sudut yang ditentukan.

Sin 56,3° =	Sin 33,7° =
Cos 56,3° =	Cos 33,7° =

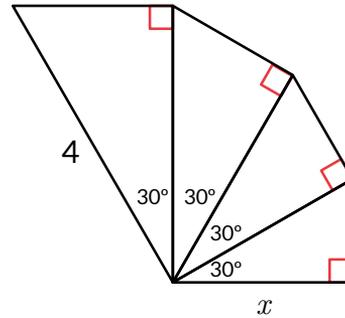
   b. Dua pasang nilai perbandingan trigonometri yang mana yang hasilnya sama? Mengapa demikian?

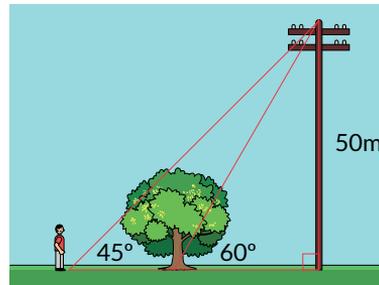
Ayo Berpikir Kritis

Pada sudut istimewa perbandingan trigonometri sin 30° dan cos 60° juga nilainya sama. Temukan alasan mengapa ada pola seperti ini secara mandiri atau bersama-sama dengan teman sekelasmu.

4. Cari panjang x, y, dan z !

5. Dari jarak 120m, seorang pengukur tanah menemukan sudut yang terbentuk antara garis permukaan dan puncak gedung adalah 30°. Gunakan perbandingan trigonometri untuk mencari tinggi gedung tersebut! Cari hasilnya dengan membulatkan ke satuan meter terdekat.

Soal Penalaran

6. Terdapat susunan beberapa segitiga siku-siku seperti berikut.

   a. Desi berkata, ia perlu mencari sin 30° untuk mencari panjangnya x. Apakah kamu setuju dengan Desi?
   b. Cari panjang x !

7. Gambar persegi panjang dengan panjang diagonal dua kali dari lebarnya. Buat persamaan untuk mencari panjang persegi panjang tersebut!

8. Seorang laki-laki sedang berjalan di sebuah area hijau. Ia berpapasan dengan sebatang pohon dan sebuah tiang listrik. Jika tinggi tiang 50 meter dengan sudut antara laki-laki dan puncak tiang 45^{o} dan sudut antara pohon dengan puncak tiang 60^{o}, berapa jarak antara seorang laki-laki tersebut dan pohon?

Refleksi

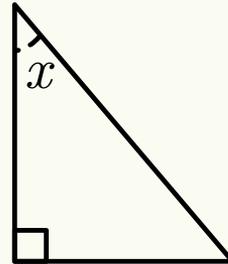
Ada tiga jenis perbandingan trigonometri yaitu sinus, cosinus, dan tangen. Masing-masing perbandingan dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari mulai dari jarak landas pesawat sampai pada pengukuran obyek yang tidak dapat secara fisik diukur ketinggiannya. Ada juga perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa yang ditemukan pada segitiga siku-siku sama kaki dan segitiga sama sisi.

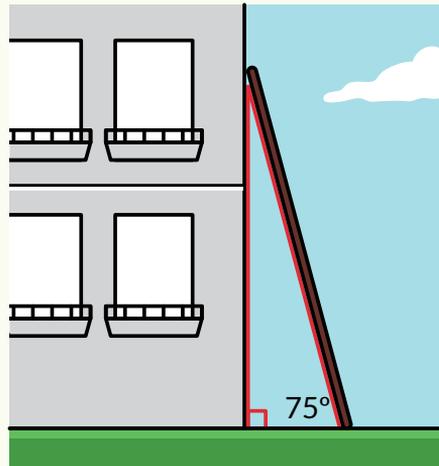
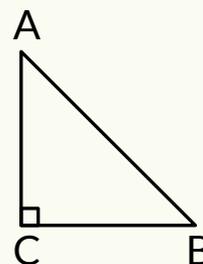
a. Apakah kalian dapat mengidentifikasi nama setiap sisi segitiga siku-siku?
b. Apakah kalian dapat menjelaskan perbedaan antara nilai tetap dan nilai perbandingan?
c. Apakah kalian dapat menjelaskan mengapa cara mencari sin θ, cos θ, dan tan θ?

d. Apakah kalian dapat menyelesaikan permasalahan matematika dengan menerapkan perbandingan trigonometri?

e. Apa manfaat perbandingan trigonometri?

Uji Kompetensi

1. Jika $\cos x = \frac{20}{29}$, berapa nilai sin x dan tan x ?

2. Sebuah persegi memiliki panjang garis diagonal 18cm. Berapa panjang sisi persegi tersebut?

3. Demi keamanan, tangga seharusnya diletakan dengan sudut kemiringan 75º. Diketahui, tinggi satu lantai pada gedung berikut adalah 3.2 meter. Jika tangga perlu disediakan tepat diluar jendela lantai 3, berapakah panjang tangga yang diperlutkan?

4. Tomi berkata bahwa sinus dari salah satu sudut lancip di segitiga siku-siku selalu sama dengan cosinus dari sudut lancip lainnya. Dengan kata lain, cos B = sin A. Apakah pernyataan Tomi benar? Apa bukti dan penjelasannya?

5. Jelaskan bagaimana perbandingan trigonometri bermanfaat untuk (pilih salah satu):

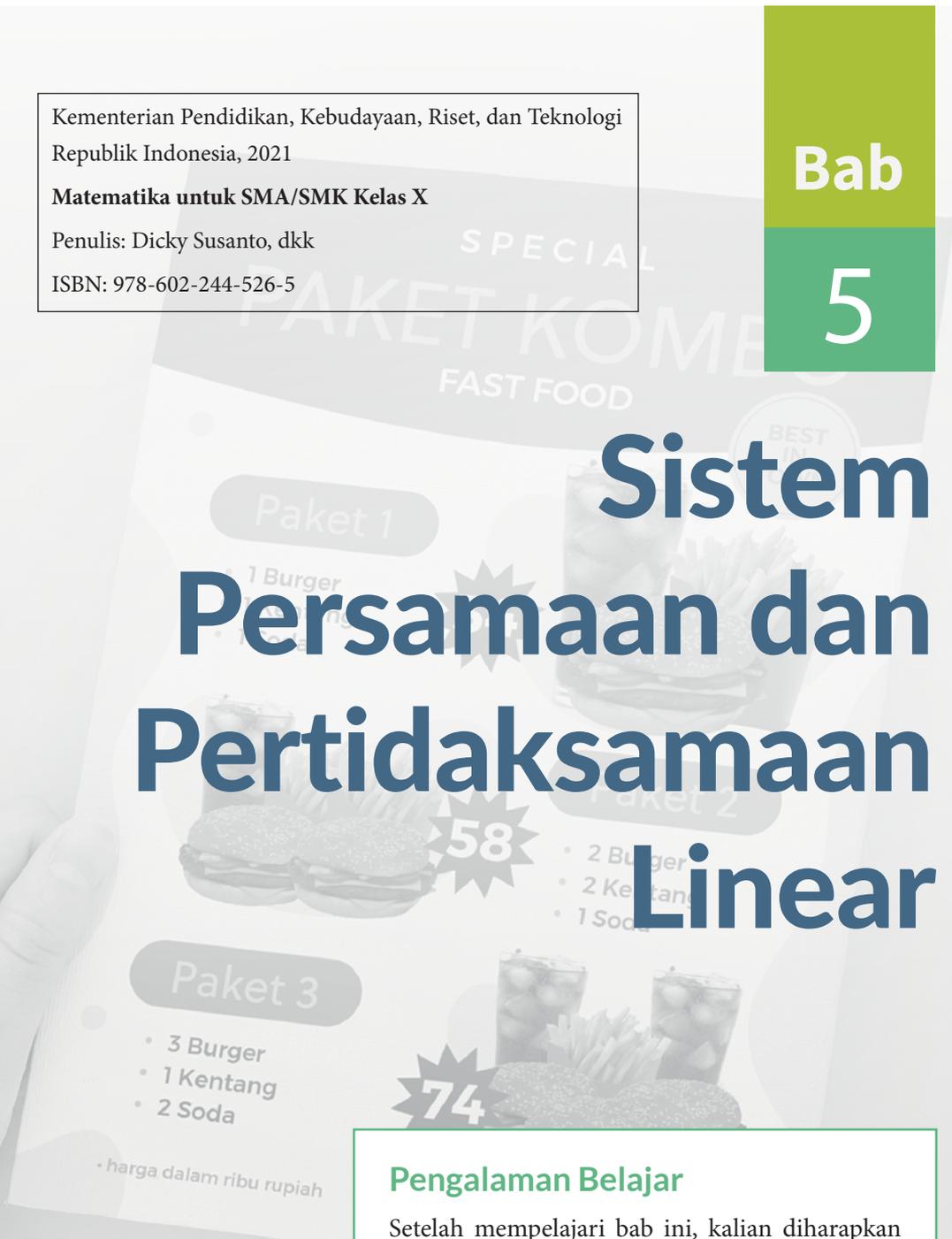
   a. Mengukur tinggi suatu tugu ikonik daerah di Indonesia seperti Jam Gadang, di Bukittingi, Sumatera Barat. Kalian boleh membuat gambar untuk mendukung penjelasanmu.

Gambar 4.25 Jam Gadang
Sumber gambar: AiryRooms

   b. Mengukur lebar sungai untuk pembangunan jembatan misalnya jembatan Youtefa di Papua. Kalian boleh membuat gambar untuk mendukung penjelasanmu.

Gambar 4.26 Jembatan Youtefa
Sumber: www.indonesia.go.id, Dok. PUPR

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab 5

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya; serta
2. Memodelkan masalah ke dalam sistem pertidaksamaan linear dan menyelesaikannya.

Perhatikan beberapa contoh berikut.

1. Daftar menu terdiri atas berbagai paket. Di setiap paket, jenis makanan sama, namun berbeda-beda banyaknya. Apakah lebih ekonomis membeli paket makanan atau memesan setiap jenis makanan secara terpisah?
2. Seekor pemangsa mengejar mangsanya. Jika diketahui kecepatan dan posisi awal masing-masing, akankah pemangsa berhasil mengejar mangsanya?
3. Dalam produksi, ada biaya tetap (misalnya pembelian mesin, sewa tempat) dan ada biaya yang tergantung pada banyaknya benda yang diproduksi (misalnya bahan baku). Harga penjualan hanya tergantung pada banyaknya benda yang dijual. Setidaknya berapa banyak benda yang harus terjual supaya perusahaan tidak merugi?

Pertanyaan-pertanyaan di atas adalah contoh pertanyaan yang bisa dijawab dengan menggunakan sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.

Sistem persamaan linear adalah gabungan beberapa persamaan linear. Penyelesaiannya adalah nilai yang memenuhi semua persamaan linear.

Mirip dengan itu, sistem pertidaksamaan linear terdiri atas beberapa pertidaksamaan linear dan penyelesaiannya membuat semua pertidaksamaan linear bernilai benar.

Pertanyaan pemantik

- Bagaimana mengubah persoalan ini menjadi sistem persamaan/pertidaksamaan linear?
- Apa artinya mencari solusi?
- Solusi sistem persamaan/pertidaksamaan linear ini menyatakan apa?

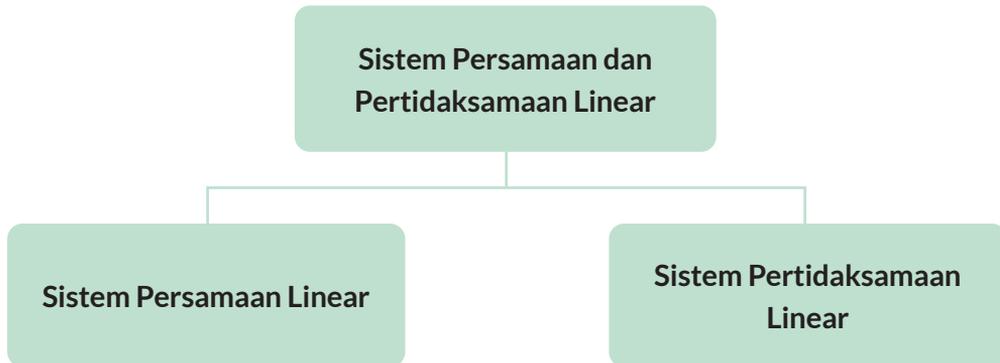
Kata Kunci

Sistem persamaan linear, sistem pertidaksamaan linear, solusi/penyelesaian, variabel.

Peta Konsep

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Sistem Persamaan Linear

Sistem Pertidaksamaan Linear

Ayo Mengingat Kembali

Di SMP kalian telah mempelajari sistem persamaan linear dengan dua variabel. Sistem persamaan linear adalah kumpulan beberapa persamaan linear yang saling terkait. Penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah nilai-nilai yang memenuhi semua persamaan tersebut.

Contoh masalah yang dapat dimodelkan dengan sistem persamaan linear.

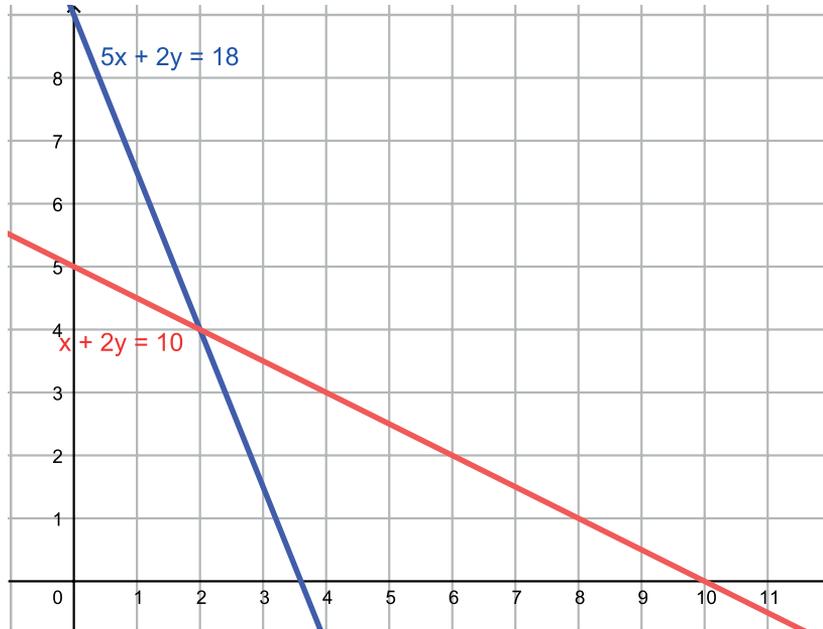
Sebuah toko alat tulis menjual paket alat tulis. Paket A seharga Rp18.000,00 berisi lima buku tulis dan dua pensil. Paket B berisi sebuah buku tulis dan dua pensil dihargai Rp10.000,00. Berapakah harga masing-masing buku tulis dan pensil?

Penyelesaian:

Jika b menyatakan harga sebuah buku tulis
dan p menyatakan harga sebuah pensil
maka model matematikanya (dalam ribuan rupiah) adalah

$$\begin{cases} 5b + 2p = 18 \\ b + 2p = 10 \end{cases}$$

Model matematika tersebut terdiri atas dua persamaan dengan dua variabel. Semua variabelnya berpangkat satu, artinya kedua persamaan di atas adalah persamaan linear. Solusi dari sistem persamaan linear tersebut menyatakan harga buku dan harga pensil.

Grafik dari sistem persamaan linear tersebut ditampilkan pada Gambar 5.1.

Gambar 5.1 Grafik Sistem Persamaan Linear Permasalahan Harga Pensil dan Buku

Solusi dari sistem persamaan linear adalah koordinat titik potong kedua garis. Kalian dapat memasukkan nilai $b = 2$ dan $p = 4$ ke dalam persamaan dan lihatlah bahwa harga tersebut membuat kedua persamaan benar. Harga buku Rp2.000,00 dan harga pensil Rp4.000,00.

A. Sistem Persamaan Linear

Setelah menguasai tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel, mari mempelajari sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Apa hal-hal yang sama dengan sistem persamaan linear dengan dua variabel? Apa saja perbedaannya?

Eksplorasi 5.1

Gambar 5.2 Bola Basket

Dalam olah raga basket, ada tiga macam nilai yang dihasilkan. Lemparan bebas yang masuk bernilai 1, lemparan dari dalam daerah bernilai 2, dan lemparan dari luar daerah bernilai 3. Wijaya mencetak nilai 27 dalam sebuah pertandingan. Ia memasukkan bola 16 kali ke dalam keranjang dengan 6 di antaranya berupa lemparan bebas. Tentukan berapa kali ia mencetak masing-masing angka.

Diskusikan dengan teman-temanmu: Bagaimana kalian menyelesaikan masalah ini?

1. Salah satu strategi yang dapat kalian gunakan adalah tebak dan perbaiki. Tebak, hitung nilainya. Jika bukan 27, perbaiki tebakan kalian.

1 angka	2 angka	3 angka	nilai

2. Tuliskan strategi lain yang kalian coba.

Ayo Berpikir Kritis

Apakah strategi yang berbeda menghasilkan jawaban yang sama? Mengapa?

Alternatif Penyelesaian

Masalah bola basket di atas dapat diselesaikan dengan sistem persamaan linear.

1. Tentukan variabelnya. Pikirkan: apa yang diketahui? Apa yang ditanya?

   Lemparan bebas yang masuk bernilai 1, lemparan dari dalam daerah bernilai 2, dan lemparan dari luar daerah bernilai 3.

   Dari kalimat ini kalian dapat berpikir bahwa ada sebuah variabel untuk setiap nilai yang mungkin (misalnya a, b, c berturut-turut adalah banyaknya lemparan yang bernilai 1, 2, dan 3).

2. Tentukan model matematikanya.

   a. Wijaya mencetak nilai 27 dalam sebuah pertandingan.

   $$a + 2b + 3c = 27$$

   b. Ia memasukkan bola 16 kali ke dalam keranjang.

   $$a + b + c = 16$$

   c. 6 di antaranya berupa lemparan bebas

   $$a = 6$$

3. Ada 3 persamaan dengan 3 variabel dan semua variabelnya berpangkat 1. Ini adalah sebuah sistem persamaan linear.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 27 \\ a + b + c = 16 \\ a = 6 \end{cases}$$

4. Kalian pernah belajar menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan eliminasi atau substitusi. Metode yang sama dapat kalian gunakan pada sistem persamaan linear tiga variabel (dengan pengulangan yang lebih banyak).

   Untuk soal ini:

   a. Substitusi $a = 6$ ke $a + b + c = 16$ menghasilkan $b + c = 10$

   b. Substitusi nilai $a = 6$ dan $b + c = 10$ ke $a + 2b + 3c = 27$ menghasilkan nilai $c = 1$

   c. Substitusi nilai a dan c menghasilkan nilai $b = 9$

5. Setelah mendapatkan solusi, tuliskan makna solusi tersebut dalam masalah sesungguhnya.

   Untuk soal ini: Ada 6 lemparan bebas, 9 lemparan dari dalam daerah bernilai 2 angka, dan 1 lemparan dari luar daerah bernilai 3 angka.

Ayo Berpikir Kritis

Berapa persamaan yang dibutuhkan untuk membentuk sistem persamaan linear dengan 3 variabel?

Ada berapa solusi yang dimiliki sistem persamaan linear?

Dalam sistem persamaan linear dengan dua variabel, ada 3 kemungkinan banyaknya solusi:

- Sistem persamaan linear memiliki satu solusi. Grafiknya berupa dua garis yang berpotongan. Solusinya adalah titik potong kedua garis.
- Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi. Grafiknya berupa dua garis yang sejajar.
- Sistem persamaan linear memiliki banyak solusi. Grafiknya berupa dua garis yang berimpit. Semua titik pada garis ini merupakan solusi.

Tabel 5.1 menunjukkan contoh sistem persamaan linear untuk setiap jenis solusi, dengan grafik masing-masing.

Tabel 5.1 Contoh Sistem Persamaan Linear dengan Banyaknya Solusi yang Berbeda-beda

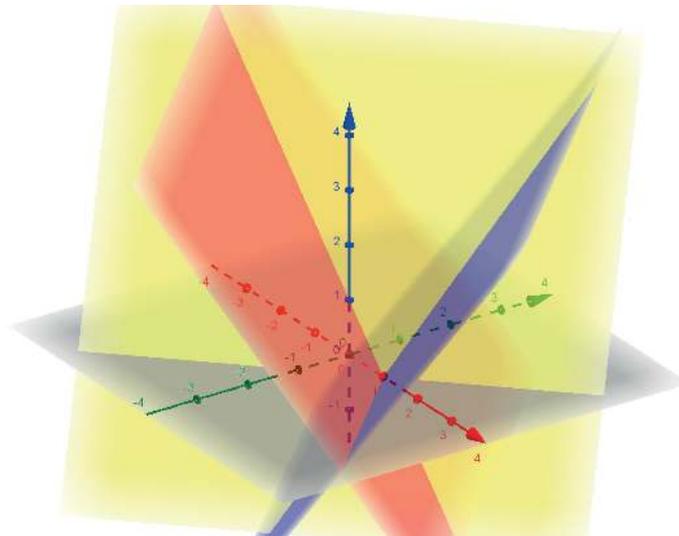
No.	Sistem Persamaan Linear	Grafik	Titik Potong
1	$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$		1 titik potong di (-1,2)
2	$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases}$		tidak ada titik potong
3	$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$		banyak titik potong

Pada sistem persamaan linear dengan tiga variabel, juga ada tiga kemungkinan banyaknya solusi.

Bagaimana menggambarkan grafik sistem persamaan linear dengan tiga variabel?

Dalam grafik, persamaan linear dengan tiga variabel berupa bidang. Perpotongan dua bidang menghasilkan garis, sedangkan perpotongan tiga bidang berupa titik.

Gambar 5.3 adalah grafik sistem persamaan linear berikut. Ketiga bidang berpotongan di titik (1,0,0).

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{cases}$$

Gambar 5.3 Grafik Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel

Ayo Menggunakan Teknologi

Jika kalian ingin membuat grafik sistem persamaan linear dengan tiga variabel, kalian dapat memanfaatkan aplikasi *GeoGebra*.

Ayo Bekerja Sama

Ayo kerjakan soal-soal berikut bersama teman-temanmu.

Latihan 5.1

1. Asep memiliki beberapa tongkat dengan tiga jenis ukuran, ukuran a, ukuran b, dan ukuran c. Asep menjajarkan 3 tongkat ukuran a, 2 tongkat ukuran b, dan 1 tongkat ukuran c dan panjangnya 390 cm. Asep menjajarkan sebuah tongkat ukuran a, 3 tongkat ukuran b, dan 2 tongkat ukuran c dan panjangnya 460 cm. Asep juga mengamati bahwa 2 tongkat ukuran a sama panjang dengan tongkat ukuran c.
   a. Tuliskan pengukuran pertama ke dalam persamaan matematika.
   b. Tuliskan hasil pengukuran kedua dan ketiga ke dalam persamaan matematika juga untuk menghasilkan sistem persamaan.
   c. Apakah sistem persamaan itu sebuah sistem persamaan linear? Bagaimana kamu tahu?
   d. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
   e. Ada berapa solusi yang ada?
   f. Berapakah panjang tiap jenis tongkat?

2. Sebuah minuman dijual dalam tiga kemasan berbeda: kecil, sedang, dan besar. Jika Bonar membeli 3 kemasan kecil, 2 kemasan sedang, dan 3 kemasan besar, dia mendapat minuman sebanyak 4.700 ml. Jika Bonar membeli 3 kemasan kecil, 1 kemasan sedang, dan 2 kemasan besar, dia mendapat 3.300 ml. Jika Bonar membeli 2 kemasan sedang dan 2 kemasan besar, dia mendapat 2.800 ml minuman. Berapakah volume tiap jenis kemasan?
   a. Tuliskan sistem persamaan yang bersesuaian dengan permasalahan tersebut.
   b. Apakah sistem persamaan itu termasuk sistem persamaan linear? Tuliskan alasannya.
   c. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
   d. Ada berapa solusi yang ada? Jelaskan.
   e. Apa artinya bagi Bonar jika sistem persamaan linear ini memiliki banyak solusi?

3. Bu Wati membeli tiga jenis buah. Kalau ia membeli 3 kg jeruk, 3 kg pepaya, dan 1 kg salak, ia harus membayar Rp130.000,00. Jika Bu Wati membeli 2 kg jeruk, 2 kg pepaya, dan 1 kg salak, ia harus membayar Rp100.000,00. Jika Bu Wati mau membeli 1 kg jeruk dan 1 kg pepaya, ia harus membayar Rp50.000,00. Berapakah harga tiap kg setiap jenis buah?
   a. Tuliskan sistem persamaan yang bersesuaian dengan permasalahan tersebut.
   b. Apakah sistem persamaan itu termasuk sistem persamaan linear? Tuliskan alasannya.
   c. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
   d. Ada berapa solusi yang ada? Jelaskan.
   e. Apa artinya bagi Bu Wati jika sistem persamaan linear ini tidak memiliki solusi?

4. Untuk setiap model matematika berikut, tentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem persamaan linear atau bukan. Jelaskan.

Ayo Berpikir Kritis

a. $\begin{cases} 5x - 3y = 10 \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 5y + z = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases}$

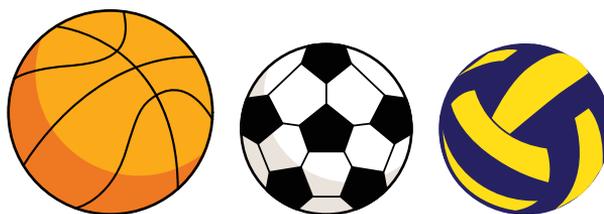
c. $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 20 \\ 3x + 4y - z = 15 \\ 2x - 5y - 3z = 10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 15x - 23y + 2z = 200 \\ 31x + 42y - \frac{1}{z} = 150 \\ 23x - 45y - 33z = 100 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 3y + 2z &= 20 \\ 2x + y - 3z &= 15 \\ 3x - 2y - z &= 35 \end{cases}$

5. Pak Musa memiliki toko beras dan menjual campuran beras. Campuran 2 kg beras A, 2 kg beras B, dan 1 kg beras C dihargai Rp50.000,00. Campuran 4 kg beras A, 2 kg beras B, dan 3 kg beras C dihargai Rp91.000,00. Campuran 4 kg beras A, 4 kg beras B, dan 2 kg beras C dihargai Rp95.000,00. Tentukan harga tiap kg beras A, beras B, dan beras C.
   a. Tuliskan model matematikanya.
   b. Apakah model matematika itu merupakan sistem persamaan linear?
   c. Ada berapa solusi yang dimiliki oleh sistem ini? Bagaimana kalian tahu?

6. Maria adalah penjaga tiket di sirkus. Ada tiga jenis tiket yang dijual. Keluarga Andi membeli 4 tiket anak-anak, 2 tiket dewasa, dan 1 tiket lansia dan membayar Rp640.000,00. Keluarga Butet membeli 1 tiket anak-anak, 3 tiket dewasa, dan 2 tiket lansia dan membayar Rp550.000,00. Keluarga Danu membeli 3 tiket anak-anak, 1 tiket dewasa, dan 1 tiket lansia dan membayar Rp450.000,00. Berapakah harga setiap jenis tiket yang dijual Maria?

7. Kinan menimbang bola yang ada di lemari sekolah. Pada penimbangan pertama, Kinan menimbang dua bola basket, sebuah bola kaki, dan tiga bola voli dan hasilnya 2.500 g. Penimbangan kedua, sebuah bola basket, dua buah bola kaki, dan dua buah bola voli beratnya 2.050 g. Penimbangan ketiga, dua buah bola basket dan sebuah bola voli beratnya 1.550 g. Berapa berat tiap jenis bola?

8. Butet ingin membeli buah. Semua buah yang ada sudah dikemas menjadi paket. Paket A terdiri atas 5 jeruk, 1 mangga, dan 8 salak beratnya 1,5 kg. Paket B terdiri atas 10 jeruk, 2 mangga, dan 4 salak beratnya 2 kg. Paket C terdiri atas 3 mangga, dan 12 salak beratnya 2 kg. Jika setiap jenis buah itu identik, berapakah berat masing-masing jenis buah?

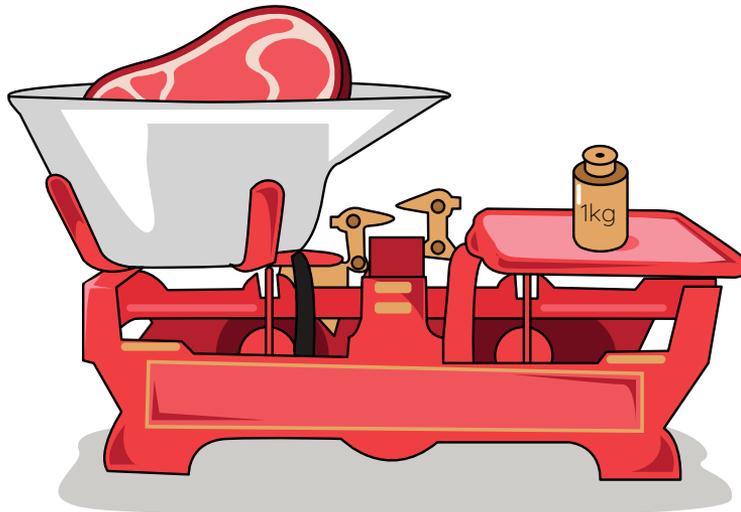
Refleksi

Dalam subbab ini kalian telah mempelajari tentang sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

1. Ada berapa persamaan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan tiga variabel?
2. Bagaimana kalian tahu jika sebuah sistem persamaan linear tidak memiliki solusi?
3. Bagaimana kalian tahu jika sebuah sistem persamaan linear memiliki banyak solusi?

B. Sistem Pertidaksamaan Linear

Selain ada istilah **persamaan**, dikenal juga istilah **pertidaksamaan**. Demikian juga selain ada sistem persamaan linear, ada juga sistem pertidaksamaan linear. Bagaimana kaitannya?

Eksplorasi 5.2

Gambar 5.4 Timbangan Dua Lengan

Pak Eko menimbang buah menggunakan timbangan dua lengan. Dua buah apel dan lima buah jeruk beratnya kurang dari 1 kg. Enam buah apel dan dua buah jeruk beratnya lebih dari 1 kg. Jika dianggap setiap apel beratnya sama dan setiap jeruk beratnya sama, berapakah berat setiap apel? Berapakah berat setiap jeruk?

1. Cobalah mengerjakan soal ini dengan metode coba dan perbaiki.

Berat 1 apel	Berat 1 jeruk	Berat 2 apel dan 5 jeruk	Berat 6 apel dan 2 jeruk

Ayo Berpikir Kritis

Strategi apa lagi yang dapat kalian coba?

2. Apakah yang telah kalian pelajari tentang sistem persamaan linear dapat membantu kalian menyelesaikan masalah ini?

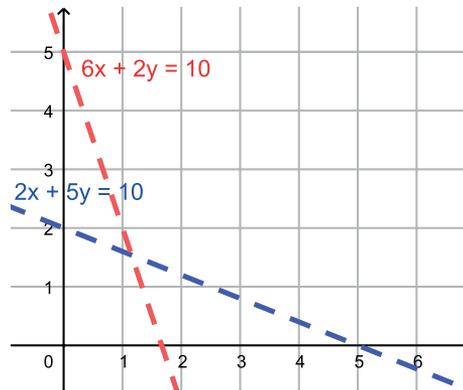
Permasalahan yang dihadapi oleh Pak Eko dapat dituliskan model matematikanya.

1. Tentukan variabelnya. Pikirkan: apa yang diketahui? Apa yang ditanya?
   Untuk soal ini berat 1 apel (misal disebut x) dan berat 1 jeruk (misal disebut y)
2. Model matematikanya (dalam satuan ons, 1 kg = 10 ons):

$$\begin{cases} 2x + 5y < 10 \\ 6x + 2y > 10 \end{cases}$$

3. Model matematika ini mengingatkan kita pada sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$$

4. Grafik sistem persamaan linear ini

a. Apakah titik (0,0) merupakan daerah hasil pertidaksamaan $2x + 5y < 10$? Petunjuk: substitusi nilai $x = 0$ dan $y = 0$ ke dalam pertidaksamaan dan periksalah apakah pertidaksamaan bernilai benar.

b. Apakah titik (0,0) merupakan daerah hasil pertidaksamaan pertidaksamaan $6x + 2y > 10$? Petunjuk: substitusi nilai $x = 0$ dan $y = 0$ ke dalam pertidaksamaan dan periksalah apakah pertidaksamaan bernilai benar.

Eksplorasi 5.3

Ayo Bereksplorasi

Gambar 5.5 Lomba Balap Karung

Kiki adalah panitia perayaan hari kemerdekaan di RT. Dari kas RT ada uang sebesar Rp500.000,00 yang dapat digunakan. Untuk penyelenggaraan perlombaan, dibutuhkan Rp20.000,00 per anak. Hadiah untuk pemenang dianggarkan Rp40.000,00 untuk setiap jenis perlombaan. Diharapkan ada lebih dari 13 anak yang berpartisipasi. Tentukan apa saja kemungkinannya.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu: Bagaimana kalian menyelesaikan masalah ini?

1. Salah satu strategi yang dapat kalian gunakan adalah tebak dan perbaiki. Tebak, hitung nilainya. Jika tidak memenuhi syarat, perbaiki tebakan kalian.

banyaknya perlombaan	biaya hadiah	banyaknya anak	biaya penyelenggaraan	biaya total

2. Tuliskan strategi lain yang kalian coba.

Ayo Berpikir Kritis

Apakah strategi yang berbeda menghasilkan jawaban yang sama? Mengapa?

3. Apakah yang telah kalian pelajari tentang sistem persamaan linear dapat membantu kalian menyelesaikan masalah ini?

Alternatif Penyelesaian

Masalah yang dihadapi Kiki dapat diselesaikan dengan sistem pertidaksamaan linear.

1. Tentukan model matematikanya. Jika x menyatakan banyaknya peserta dan y menyatakan banyaknya perlombaan maka model matematikanya adalah:

$$\begin{cases} 20x + 40y \leq 500 \\ x > 13 \end{cases}$$

Ini adalah sebuah sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel

2. Kalian telah belajar menyelesaikan sistem persamaan linear. Pengetahuan ini dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear.

   a. Gambarkan grafik sistem persamaan linear yang berpadanan. Yang dimaksud adalah sistem persamaan linear yang didapat dengan mengubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda persamaan.

$$\begin{cases} 20x + 40y = 500 \\ x = 13 \end{cases}$$

   b. Perlu dicatat bahwa garis yang didapat dari pertidaksamaan **lebih atau sama dengan** dan **kurang atau sama dengan** digambarkan dengan garis utuh (artinya garis tersebut termasuk daerah jawaban) sedangkan garis yang didapat dari pertidaksamaan **lebih dari** atau **kurang dari** digambarkan dengan garis putus-putus (artinya garis tersebut hanya batas, tidak termasuk daerah jawaban).

   c. Pilih sebuah titik, misalnya (0,0), lalu substitusikan ke dalam pertidaksamaan. Jika nilainya memenuhi ketidaksamaan maka daerah yang memuat (0,0) diarsir untuk menunjukkan bahwa daerah inilah yang merupakan daerah hasil. Garis persamaan linear menjadi pembatas antara daerah jawab dan bukan daerah jawab.

d. Lakukan hal yang sama untuk pertidaksamaan yang lain.

e. Solusinya adalah daerah yang merupakan irisan semua daerah jawab.

f. Tentukan makna solusi ini dalam masalah awal.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan *GeoGebra* untuk menggambarkan grafik sistem pertidaksamaan linear ini. Bandingkan hasilnya dengan grafik yang kalian buat.

Latihan 5.2

1. Bonar memiliki dua pekerjaan paruh waktu. Untuk mengantar barang, Bonar dibayar Rp15.000,00 per jam. Untuk pekerjaan mencuci piring di restoran, Bonar dibayar Rp9.000,00 per jam. Dia tidak dapat bekerja lebih dari 10 jam. Bonar membutuhkan uang sebesar Rp120.000,00. Berapa jam dia harus bekerja untuk masing-masing pekerjaan?

   a. Tuliskan model matematikanya.

   b. Apakah model matematika tersebut merupakan sistem pertidaksamaan linear?

   c. Gambarkan grafiknya.

   d. Tentukan koordinat titik-titik potongnya.

e. Tentukan daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear.

f. Apakah Bonar bisa mendapatkan uang yang dia butuhkan dengan bekerja mengantar barang selama 4 jam?

g. Apakah Bonar bisa mendapatkan uang yang dibutuhkan jika bekerja selama 9 jam?

2. Nova membeli pupuk dan tanaman untuk kebunnya. Nova memiliki uang sebesar Rp100.000,00. Setiap kantong pupuk harganya Rp20.000,00 dan setiap tanaman harganya Rp10.000,00. Nova ingin membeli setidaknya 5 tanaman. Berapa banyak tanaman dan pupuk yang dapat Nova beli?

3. Bu Dini membutuhkan telur ayam dan telur puyuh. Telur ayam harganya Rp22.000,00 per kg dan telur puyuh harganya Rp30.000,00 per kg. Bu Dini memiliki uang sebesar Rp150.000,00. Karena khawatir telurnya pecah di perjalanan, Bu Dini tidak mau membawa lebih dari 6 kg telur. Apakah Bu Dini dapat membeli 6 kg telur?

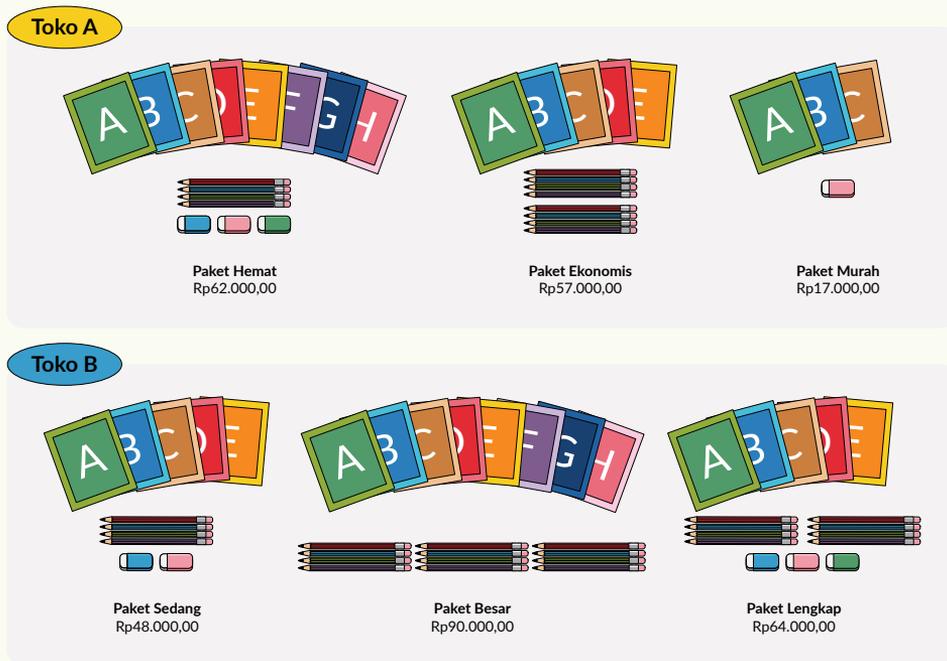
4. Sebuah UMKM memproduksi dua jenis sabun cair, yaitu sabun mandi dan sabun cuci tangan. Untuk setiap liter sabun mandi, dibutuhkan biaya produksi Rp15.000,00 per liter. Biaya produksi sabun cuci tangan Rp10.000,00 per liter. Selain itu, pabrik juga harus mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp500.000,00. UMKM tersebut memiliki modal sebesar Rp2.500.000,00. Gudang yang ada dapat menampung 150 liter sabun cair. Sabun mandi dijual seharga Rp25.000,00 per liter dan sabun cuci tangan Rp20.000,00 per liter. Apakah mereka bisa mendapatkan keuntungan dengan harga tersebut? Berikan contoh banyaknya sabun mandi dan sabun cuci masing-masing yang dijual sehingga pendapatan mereka lebih dari pengeluaran.

Refleksi

Dalam subbab ini kalian telah mempelajari tentang sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel.

1. Ada berapa pertidaksamaan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel?
2. Apa yang terjadi jika banyaknya pertidaksamaan kurang dari dua? Apa yang terjadi jika banyaknya pertidaksamaan lebih dari dua?

Uji Kompetensi

1. Bu Sri bertugas untuk menyiapkan hadiah untuk siswa berprestasi di sekolah. Bu Sri telah menetapkan bahwa hadiah berupa alat tulis (buku tulis, pena, dan penghapus). Bu Sri mengunjungi dua toko alat tulis dan mendapati alat tulis dijual dalam bentuk paket sebagai berikut.

Berdasarkan harga tiap paket yang tersedia di toko A dan toko B, hitunglah harga dari setiap alat tulis di masing-masing toko (buku tulis, pena, dan penghapus) dan jawablah pertanyaan berikut.

   a. Manakah yang lebih mahal: harga sebuah buku tulis di toko A atau di toko B?
   b. Manakah yang lebih mahal: harga sebuah penghapus di toko A atau di toko B?
   c. Manakah yang lebih mahal: harga sebuah pena di toko A atau di toko B?

2. Pak Budi memiliki uang sebanyak Rp10.000.000,00. Ia ingin mendepositokan uangnya. Bank A memberikan bunga sebesar 4% dan bank B memberikan bunga sebesar 6%. Pak Budi ingin mendapatkan bunga setidaknya Rp550.000,00 namun ia tidak ingin mendepositokan uangnya pada satu bank saja. Apakah hal itu mungkin? Jika ya, sebutkan salah satu kemungkinannya.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab

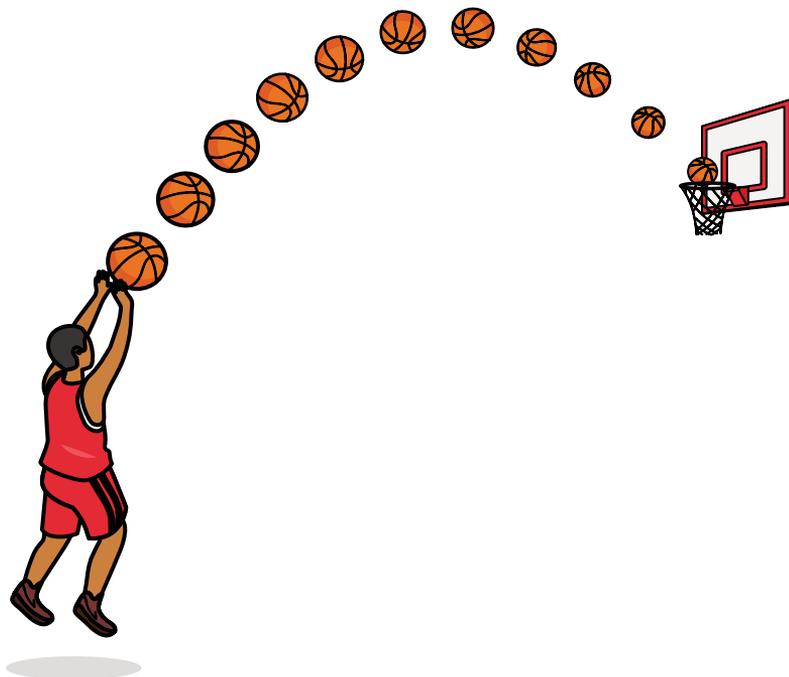
6

Fungsi Kuadrat

Pengalaman Belajar

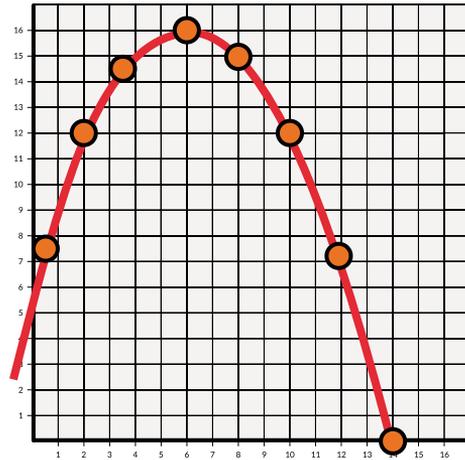
Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Mengidentifikasi fungsi kuadrat dalam bentuk aljabar, tabel nilai, dan grafik
2. Menemukan karakteristik dari fungsi kuadrat
3. Menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari dengan cara aljabar maupun grafik

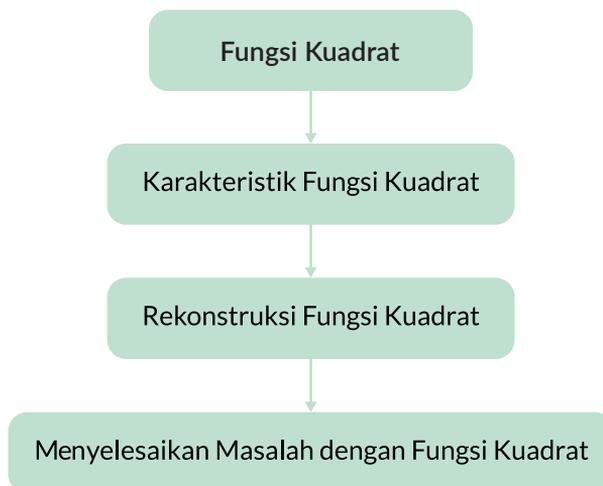
Pernahkah kalian mengamati lintasan bola basket ketika kalian mendorong bola ke arah jaring? Lintasannya berbentuk parabola dan gerak bola dikatakan gerak parabola. Gambar 6.1 menunjukkan posisi bola pada suatu waktu tertentu.

Gambar 6.1 Lintasan Bola Basket

Selain bola basket, lintasan bola kaki juga dapat berupa parabola. Lintasan dan bentuk parabola ditemui dalam hidup sehari-hari. Contoh lain adalah air yang keluar dari selang serta bentuk bangunan dan jembatan. Bentuk pisang juga menyerupai parabola.

Parabola merupakan bentuk fungsi kuadrat dalam grafik. Fungsi kuadrat adalah fungsi polinom (suku banyak) dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2. Kalian masih ingat dengan fungsi linear yang grafiknya berbentuk garis lurus. Fungsi linear adalah fungsi polinom dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1.

Gambar 6.2 menunjukkan grafik fungsi kuadrat. Posisi bola merupakan posisi titik dalam sistem koordinat Kartesius.

Gambar 6.2 Grafik Fungsi Kuadrat

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
Fungsi kuadrat, parabola, persamaan kuadrat, minimum dan maksimum, titik puncak, sumbu simetri, titik potong dengan sumbu, diskriminan.	1. Apa saja karakteristik dari fungsi kuadrat? 2. Bagaimana mengonstruksi fungsi kuadrat berdasarkan informasi yang tersedia? 3. Bagaimana menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari?

Peta Konsep

Ayo Mengingat Kembali

Persamaan kuadrat dengan $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselesaikan dengan berbagai cara.

1. Faktorisasi

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x = 2$$

2. Melengkapkan kuadrat

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) = 0$$
$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x = 1$$
$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = 1 + \frac{9}{16}$$
$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$
$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$x - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$
$$x = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$
$$x = 2$$

atau

$$x - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$
$$x = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

3. Menggunakan rumus abc (Rumus Kuadrat)
   Bentuk Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
   dengan $a \neq 0$ akar-akarnya dapat ditentukan dengan

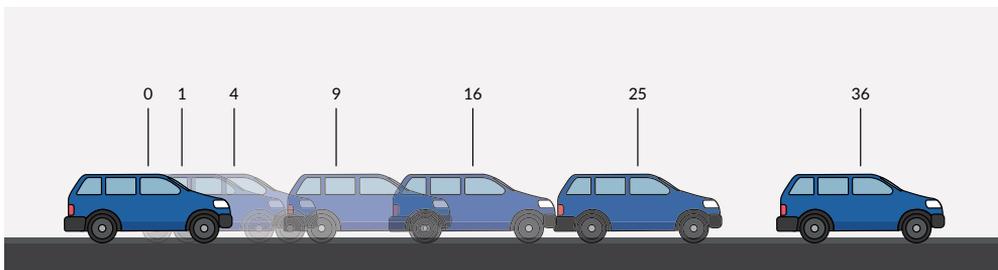
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{3 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{2}$ atau $x = 2$

A. Karakteristik Fungsi Kuadrat

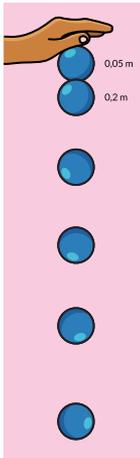
Eksplorasi 6.1 Menyelidiki fungsi kuadrat terbuka ke atas

Gambar 6.3 Lintasan Mobil

1. Isilah tabel dengan jarak tempuh mobil terhadap waktu.

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)							

2. Bagaimana hubungan antara jarak dengan waktu?
3. Gambarkan grafik jarak terhadap waktu pada kertas berpetak.
4. Apakah hasilnya menggambarkan bentuk parabola?

Eksplorasi 6.2. Menyelidiki fungsi kuadrat terbuka ke bawah

Bola dijatuhkan dari keadaan diam pada posisi 0. Lintasan bola diberikan dalam gambar.

Gambar 6.4 Lintasan Bola

1. Lengkapi tabel dengan menggunakan penggaris.

Waktu (detik)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Posisi (m)	0	-0,05	-0,2			

2. Gambarkan grafik posisi terhadap waktu pada kertas berpetak.
3. Mengapa posisi menggunakan tanda negatif?
4. Apakah hasilnya menggambarkan bentuk parabola?

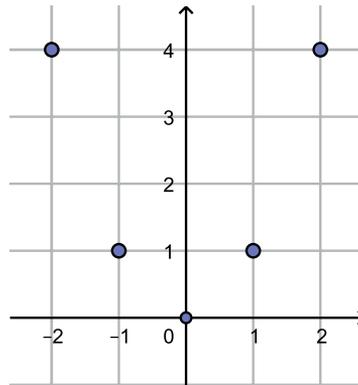
Eksplorasi yang barusan kalian lakukan berkaitan dengan apa yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Kalian perlu eksplorasi fungsi kuadrat yang lebih mendalam untuk menemukan hal-hal yang sangat menarik.

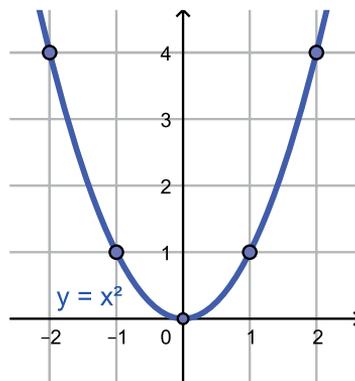
Sebelumnya, perhatikan terlebih dahulu contoh di bawah ini.

1. Buatlah grafik fungsi $f(x) = x^2$ dengan cara:
   a. Melengkapi Tabel 6.1

Tabel 6.1 Nilai x dan y untuk fungsi $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$	
x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

b. Plot setiap titik pada Tabel 6.1 ke dalam sistem koordinat. Koordinat titik yang didapatkan dari Tabel 6.1 adalah (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), dan (2,4

Gambar 6.5 Plot titik pada grafik fungsi $f(x) = x^2$

c. Hubungkan titik-titik dalam sistem koordinat sehingga didapatkan grafik fungsinya.

Gambar 6.6 Grafik fungsi $f(x) = x^2$

Kalian perlu bekerja sama untuk melakukan eksplorasi dengan menggambar grafik-grafik fungsi kuadrat terlebih dahulu. Jika kalian memiliki *graphic calculator* atau aplikasi *GeoGebra*, kalian boleh menggunakannya. Grafik yang digambar adalah $y = f(x)$ dengan $f(x)$ adalah fungsi kuadrat yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Lakukan langkah-langkah yang sama untuk setiap fungsi kuadrat ini, gunakan kertas berpetak.

a. $f(x) = -x^2$
b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
c. $f(x) = -x^2 - x + 2$
d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$
e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$
f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$
g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$
h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$
i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$
j. $f(x) = 2x^2 + 1$

Hasil kerja kalian akan digunakan untuk eksplorasi.

Eksplorasi 6.3. Menyelidiki peran tanda pada nilai a (> 0 atau $a < 0$) dalam $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pelajari grafik-grafik a - j yang telah kalian buat sebelumnya. Untuk setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ kalian dapat menentukan peran a.

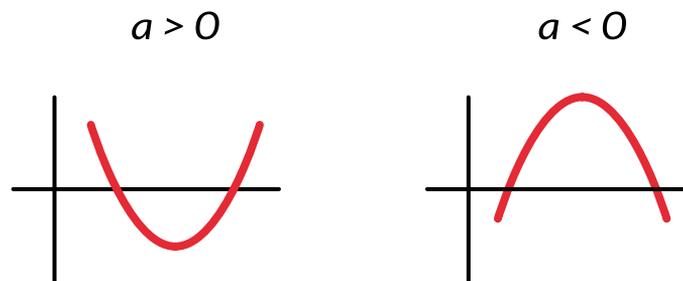
1. Tentukan fungsi-fungsi yang nilai $a > 0$
   a. Apa kesamaan grafik fungsi-fungsi ini?
2. Tentukan fungsi-fungsi yang nilai $a < 0$
   a. Apa kesamaan grafik fungsi-fungsi ini?

3. Mengapa dalam daftar fungsi kuadrat di atas tidak ada fungsi yang nilai $a = 0$?

Ayo Berpikir Kritis

4. Lengkapi tabel dengan menggambar bentuk grafik

$f(x) = ax^2 + bx + c$	grafik berbentuk
$a > 0$	
$a < 0$	

Dari eksplorasi 6.1, 6.2, dan 6.3 kalian menemukan bahwa fungsi kuadrat terbuka ke atas jika $a > 0$ dan terbuka ke bawah jika $a < 0$.

Gambar 6.7 Dua Jenis Grafik Fungsi Kuadrat dengan Tanda a Berbeda

Untuk keadaan seperti apa grafik $a > 0$ digunakan dalam kehidupan sehari-hari?

Gerak mobil dimulai pada saat nol detik dan posisi nol m. Gerak menghasilkan grafik setengah parabola yang terbuka ke atas. Grafik berada di atas sumbu t.

Gerak mobil makin lama makin cepat karena untuk selang waktu yang sama jarak makin besar dan arahnya selalu ke kanan/timur.

Untuk keadaan seperti apa grafik $a > 0$ digunakan dan kehidupan sehari-hari?

Gerak bola dimulai pada waktu nol detik dan posisi nol m. Gerak menghasilkan grafik setengah parabola saja yang terbuka ke bawah. Grafik berada di bawah sumbu t.

Gerak bola makin lama makin cepat (untuk selang waktu yang sama jarak makin besar) dan arahnya selalu ke bawah.

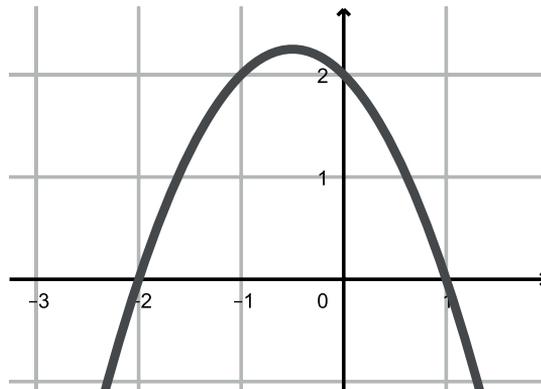
Ayo Berdiskusi

Mengapa Eksplorasi 6.1 dan 6.2 hanya menghasilkan grafik setengah parabola?

Eksplorasi 6.4 Menyelidiki peran nilai c dalam grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Untuk setiap grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang telah kalian buat, tentukan koordinat titik potong grafik dengan sumbu y.

1. Tentukan konstanta fungsi kuadrat yang menunjukkan titik potong grafik dengan sumbu y
2. Untuk setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, titik potong grafik dengan sumbu y terletak pada koordinat ____________________

Eksplorasi 6.4 menunjukkan peran c dalam fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ yaitu menentukan titik potong grafik dengan sumbu y.

Gambar 6.8 Fungsi Kuadrat dengan c Berbeda

Nilai c menentukan titik potong grafik dengan sumbu y.

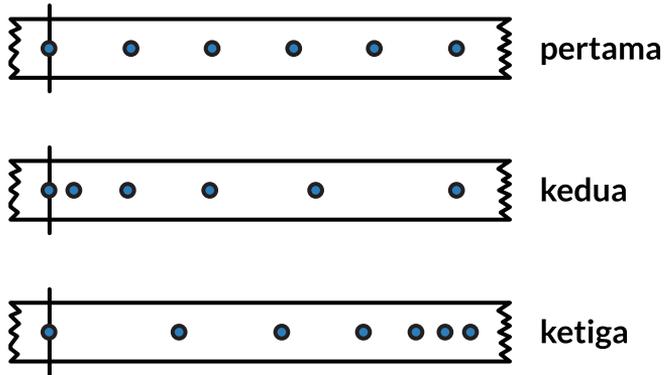
Latihan 6.1

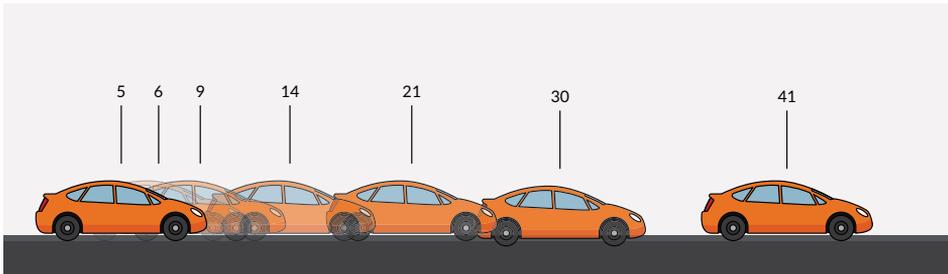
1. a. Tentukan parabola yang terbuka ke atas dan ke bawah.

   b. Bandingkan kedua parabola. Menurut kalian, parabola mana lebih lebar terbukanya? Konstanta dari fungsi kuadrat
   $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ mana yang menentukan?

2. Fungsi kuadrat yang terbuka ke atas adalah_______________(Jawaban bisa lebih dari satu)
   a. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
   b. $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$
   c. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$
   d. $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$

3. Fungsi kuadrat yang terbuka ke bawah adalah_______________(Jawaban bisa lebih dari satu)
   a. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
   b. $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$
   c. $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$
   d. $f(x) = 4x^2 + 11x - 7$

4. Perhatikan diagram gerak di bawah ini. Diagram gerak adalah diagram yang menunjukkan posisi terhadap waktu dimana selang waktu antar dua posisi selalu sama. Gambar mana yang akan menghasilkan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a < 0, a = 0$, dan $a > 0$?

Latihan 6.2

1. Kalian perhatikan bahwa posisi awal tidak dumulai pada nol.

   a. Isi tabel jarak tempuh mobil terhadap waktu.

Waktu (det)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)							

   b. Gambarkan grafik jarak terhadap waktu pada kertas berpetak.

   c. Apakah hasilnya menggambarkan bentuk parabola?

   d. Berapa nilai c jika merujuk pada $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

2. Tabel di bawah menunjukkan jarak tempuh suatu mobil pada setiap waktu.

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)	0	5	8	9	8	5	0

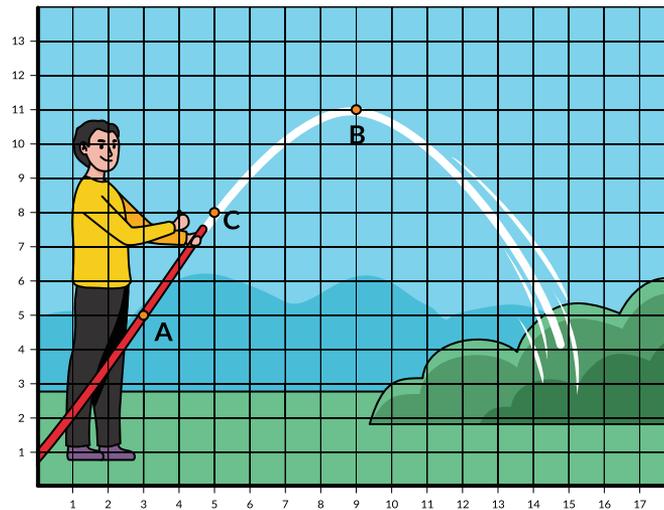
Tanpa menggambar grafik, tentukan apakah grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah. Jelaskan alasan kalian.

3. Tabel di bawah menunjukkan keuntungan penjualan suatu produk untuk jumlah produk yang terjual.

Jumlah benda	0	10	20	25	30	40
Keuntungan (ribu rupiah)	0	800	1200	1250	1200	800

Tanpa menggambar grafik, tentukan apakah grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah. Jelaskan alasan kalian.

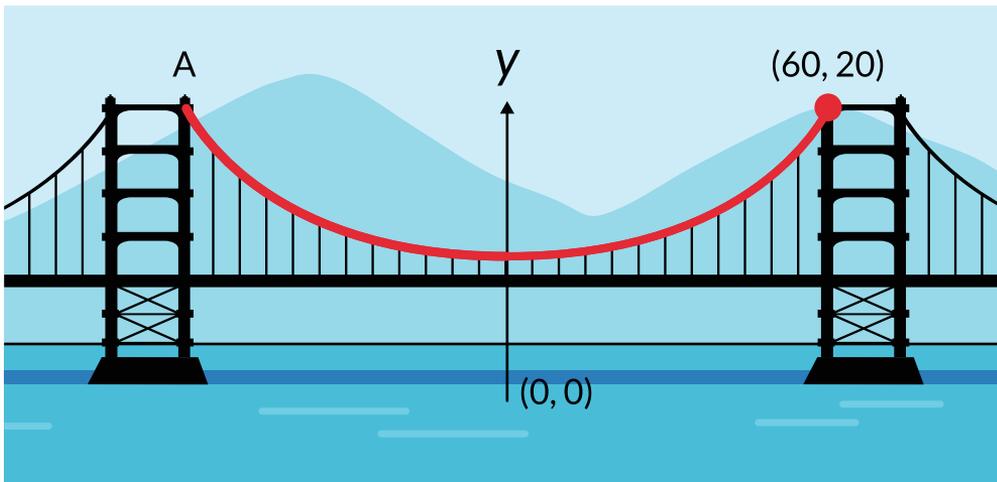
Eksplorasi 6.5 Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum dan Sumbu Simetri

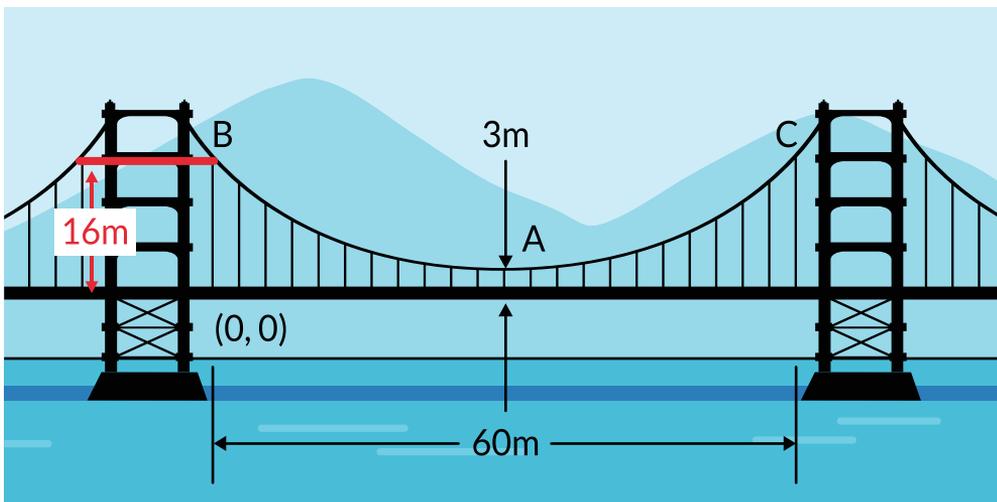
Perhatikan gambar di bawah ini.

Gambar 6.9 Lintasan Air Selang

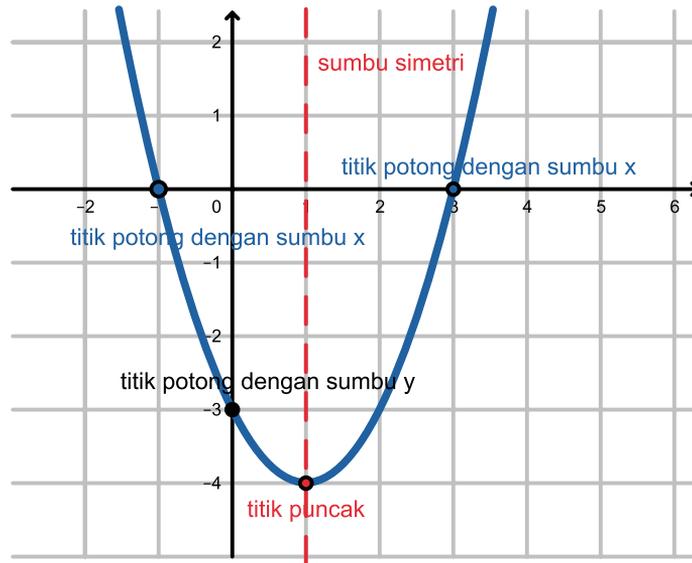
Jika titik A merupakan titik O, berapa koordinat titik C?

Berapa ketinggian maksimum air yang keluar dari selang?

Perhatikan gambar kedua. Kabel penghubung jembatan berbentuk parabola.

Berapa koordinat titik A? Jelaskan alasan kalian. Selain sebagai titik asal O apa lagi yang istimewa dari titik ini?

Gambar 6.10 Struktur Jembatan

Berapa koordinat titik A, B dan C? Jelaskan alasan kalian.

Gambar 6.11 Struktur Jembatan

Dapatkah kalian menyebutkan karakteristik lain dari fungsi kuadrat berdasarkan Eksplorasi 6.5?

Gambar 6.12 Karakteristik Fungsi Kuadrat

Perhatikan Gambar 6.12 dan amati beberapa titik istimewa dalam fungsi kuadrat:

- Titik potong dengan sumbu y, yaitu $(0, -3)$. Apakah kalian masih ingat bagaimana menentukan titik potong dengan sumbu y?
- Titik-titik potong dengan sumbu x, yaitu (-1,0) dan $(3, 0)$.
- Vertex disebut juga sebagai titik puncak, dapat berupa titik maksimum atau titik minimum (sesuai dengan grafik terbuka ke atas atau ke bawah). Titik minimum dalam grafik yaitu $(1, -4)$.
- Sumbu simetri selalu melalui titik puncak, $x = 1$

Eksplorasi 6.6

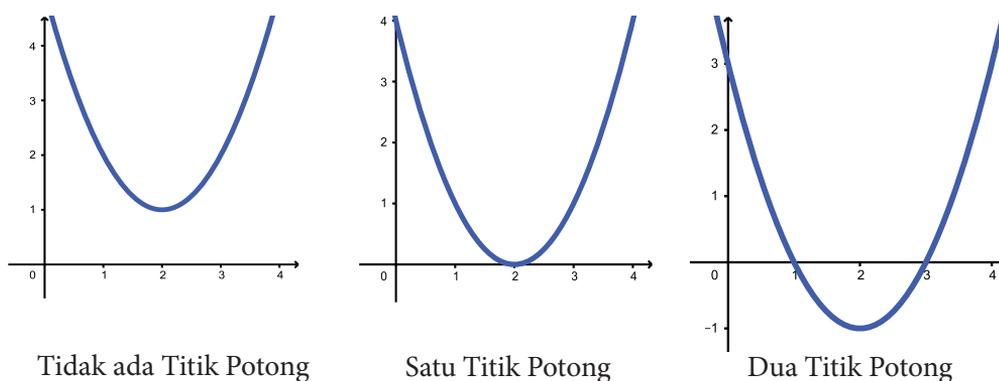
Untuk setiap fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$, yang diberikan dalam a - j, hitunglah nilai $D = b^2 - 4ac$

1. Tentukan fungsi-fungsi yang $D > 0$. Apa kesamaan fungsi-fungsi ini?
2. Tentukan fungsi-fungsi yang $D = 0$. Apa kesamaan fungsi-fungsi ini?
3. Tentukan fungsi-fungsi yang $D < 0$. Apa kesamaan fungsi-fungsi ini?
4. Lengkapilah tabel berikut

$f(x) = ax^2 + bx + c$	banyaknya akar $ax^2 = bx + c = 0$	banyaknya titik potong grafik dengan sumbu x
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

Ayo Berpikir Kritis

1. Bagaimana grafik fungsi kuadrat yang $D < 0$ dan $a < 0$?
2. Pada rumus abc, adakah nilai D ?
3. Bagaimana hubungan titik potong dengan sumbu x dengan akar persamaan kuadrat?

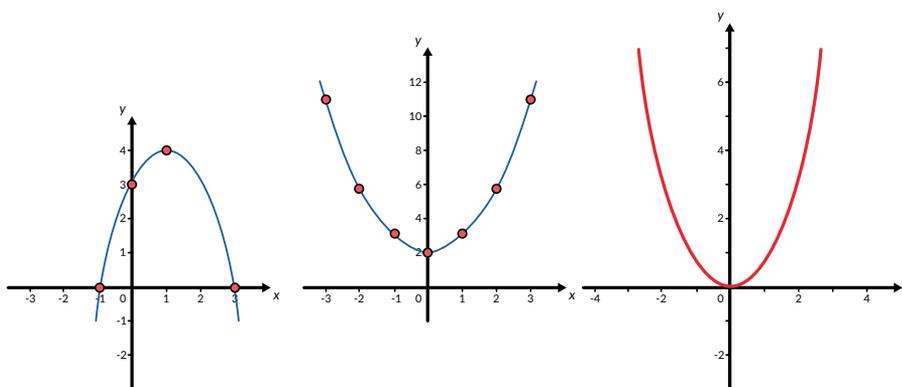
Titik potong dengan sumbu x menunjukkan bahwa $f(x) = 0$, artinya kalian mencari akar-akar persamaan kuadrat.

Gambar 6.13 Titik Potong dengan sumbu x

Pada fungsi kuadrat berbentuk $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, diskriminan diberikan oleh nilai $D = b^2 - 4ac$ untuk menentukan jumlah titik potong dengan sumbu x.

$D > 0$ maka ada dua titik potong dengan sumbu x.
$D = 0$ maka ada satu titik potong dengan sumbu x.
$D < 0$ maka tidak ada titik potong dengan sumbu x.

Latihan 6.3

1. Tentukan berapa banyaknya titik potong dari fungsi kuadrat berikut.
   a. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
   b. $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$
   c. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$
   d. $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
   e. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
   f. $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$
   g. $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$
   h. $f(x) = 4x^2 + 11x - 7$

2. Tentukan koordinat titik puncak, sumbu simetri, koordinat titik potong dengan sumbu y, dan banyak titik potong dari grafik fungsi-fungsi kuadrat di bawah ini.

   Apakah hubungan antara titik puncak dengan grafik terbuka ke atas atau ke bawah?

3. Perhatikan tabel di bawah ini, yang menunjukkan jarak tempuh suatu mobil sebagai fungsi dari waktu

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)	8	13	16	17	16	13	8

a. Berapa jarak maksimum yang ditempuh?

b. Berapa koordinat titik maksimum?

c. Tentukan persamaan garis sumbu simetri.

4. Perhatikan tabel di bawah ini, yang menunjukkan biaya produksi sebagai fungsi dari jumlah barang.

Biaya produksi	0	500	400	500	800	1300	6
Jumlah	0	10	20	30	40	50	8

a. Berapa biaya minimum?

b. Berapa koordinat titik minimum?

c. Tentukan persamaan garis sumbu simetri.

Ayo Berpikir Kritis

5. Untuk setiap kasus di bawah ini tentukan apakah grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah.

a. Biaya produksi sebagai fungsi dari jumlah barang.

b. Keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang.

c. Kualitas bunyi dari *sound system* sebagai fungsi dari amplitudo gelombang bunyi.

d. Efektivitas obat sebagai fungsi dari dosis obat.

e. Keselamatan pemakaian suatu bahan sebagai fungsi dari waktu pemakaian.

Latihan 6.4

1. Keuntungan penjualan biskuit sebagai fungsi dari jumlah produksi.
$f(x) = -80x^2 + 480x - 540$

a. Buat tabelnya dari $x = 0$ hingga $x = 50$

b. Gambarkan grafiknya.

c. Tentukan keuntungan maksimum.

2. Fungsi kuadrat untuk gerak bola adalah $f(t) = -5t^2 + 11t + 12$

a. Buat tabel dari $t = 0$ hingga $t = 5$ detik

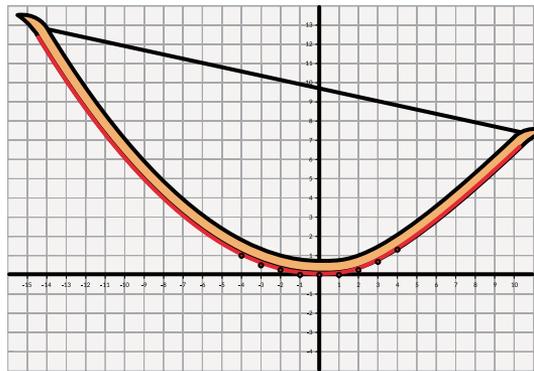
b. Gambarkan grafiknya

c. Tentukan ketinggian maksimum

1. Apakah kalian dapat membuat grafik fungsi kuadrat jika diberikan tabel nilai?
2. Apakah kalian dapat membedakan fungsi kuadrat terbuka ke atas dengan terbuka ke bawah?
3. Apakah kalian dapat menjelaskan peran c dalam fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$?
4. Apakah kalian dapat menentukan titik puncak, sumbu simetri, titik potong dengan sumbu y dan titik potong dengan sumbu x?
5. Apakah kalian dapat membedakan titik maksimum dan titik minimum?
6. Apakah kalian dapat melihat hubungan antara diskriminan dengan banyak titik potong dengan sumbu x.

B. Mengonstruksi Fungsi Kuadrat

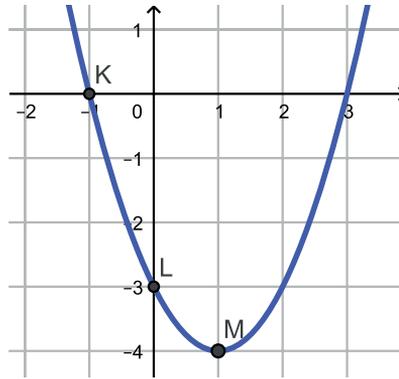
Eksplorasi 6.7.

Tentukan tiga titik yang melalui busur.

Gambar 6.14 Busur Panah sebagai Fungsi Kuadrat

Bagaimana kalian menentukan fungsi kuadrat dari lengkungan busur?

Jika tiga titik diketahui maka $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat ditentukan. Kalian menggunakan sistem persamaan tiga variabel untuk menentukan nilai a, b , dan c.

Contoh:

Carilah persamaan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $K(-1,0)$, $L(0,-3)$, dan $M(1,-4)$.

Gambar 6.15 Grafik fungsi kuadrat yang melalui K (-1,0), L(0,-3), dan M(1,-4)

Alternatif Penyelesaian 1:

Substitusi koordinat K(-1,0) ke dalam fungsi, didapat persamaan:

$0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$

Substitusi koordinat L(0,-3) didapat persamaan:

$-3 = a(0)^2 + b(0) + c$

Substitusi koordinat M(1,-4) didapat persamaan:

$-4 = a(1)^2 + b(1) + c$

Dari tiga persamaan ini didapatkan sistem persamaan linear

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = -3 \\ a + b + c = -4 \end{cases}$$

Kalian telah mempelajari sistem persamaan linear dan solusinya adalah
$a = 1, b = 0, c = -4$

Persamaan fungsi kuadrat yang melalui titik K(-1,0), L(0,-3), dan M(1,-4) adalah

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Alternatif Penyelesaian 2:

Memanfaatkan fakta bahwa M(1,-4) adalah titik puncak fungsi, maka
$f(x) = a(x-1)^2 - 4$

Substitusi titik potong dengan sumbu y $\quad -3 = a(0-1)^2 - 4$

$$-3 = a - 4$$
$$a = 1$$

Sehingga persamaan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Kalian dapat mengeksplorasi berbagai bentuk fungsi kuadrat berdasarkan grafik-grafik yang telah kalian buat sebelumnya.

Eksplorasi 6.8.

Ayo Bereksplorasi

1. Memfaktorkan bentuk fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$
   a. Tentukan fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk $y = a(x-p)(x-q)$
      1) Tentukan nilai p dan q
      2) Tentukan titik potong grafik dengan sumbu x
      3) Tentukan nilai $D = b^2 - 4ac$
      4) Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
   b. Tentukan fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk $y = a(x-r)^2$
      1) Tentukan nilai r
      2) Bagaimana letak grafik dengan sumbu x? Berapa koordinatnya?
      3) Tentukan nilai $D = b^2 - 4ac$
      4) Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
   c. Tentukan fungsi yang tidak melalui sumbu x.
      1) Tentukan nilai $D = b^2 - 4ac$
      2) Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
   d. Bagaimana nilai $D = b^2 - 4ac$ menentukan banyaknya perpotongan grafik fungsi dengan sumbu x?

Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Bentuk Faktor**	**Koordinat titik potong dengan sumbu x**
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

2. Sumbu simetri adalah garis yang melalui titik puncak. Untuk setiap grafik fungsi yang ada:
   a. Tentukan sumbu simetrinya
   b. Tentukan kaitan nilai p, q, r pada no. 1 dengan sumbu simetri
   c. Tentukan nilai $-\frac{b}{2a}$
   d. Tuliskan dua cara menentukan sumbu simetri.
3. Titik puncak adalah koordinat titik maksimum atau titik minimum. Untuk setiap grafik fungsi yang ada:
   a. Tentukan koordinat titik puncaknya
   b. Tentukan hubungan nilai absis titik puncak dengan sumbu simetri
   c. Substitusi nilai sumbu simetri pada fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nilai ini sama dengan apa?
   d. Hitung nilai $\frac{D}{-4a}$. Nilai ini sama dengan apa?
   e. Ubah bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ menjadi bentuk $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Nilai (h, k) menunjukkan apa?
   f. Tuliskan berbagai cara menentukan koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat.

Dari eksplorasi kalian melihat ada beberapa bentuk untuk menuliskan fungsi kuadrat.

1. Bentuk standar $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Titik potong dengan sumbu x pada $(p, 0)$ dan $(q, 0)$, yaitu $y = f(x) = a(x-p)(x-q)$
3. Bentuk dengan titik puncak (h, k) yaitu $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$

Latihan 6.5

1. Fungsi kuadrat dengan titik puncak (2,6) dan melalui titik (1,7). nyatakan fungsi kuadrat dalam ke tiga bentuk.
2. Suatu bola dilemparkan dari ketinggian awal 4 m dan mencapai ketinggian maksimum 8 m setelah dua detik sejak dilempar. Nyatakan fungsi kuadrat dalam ke tiga bentuk.

Ayo Berpikir Kritis

3. Untuk setiap kasus di bawah ini tentukan apakah diskriminan fungsi kuadrat sama dengan nol, lebih kecil dari nol atau lebih besar dari nol.
   a. Pendapatan dari penjualan sebagai fungsi dari jumlah barang.
   b. Keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang.
   c. Kualitas bunyi dari sound system sebagai fungsi dari amplitudo gelombang bunyi.
   d. Efektivitas obat sebagai fungsi dari dosis obat.
   e. Keselamatan pemakaian suatu bahan sebagai fungsi dari waktu pemakaian.

Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui tiga titik dari fungsi kuadrat?
2. Apakah kalian dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui titik potong dengan sumbu x?
3. Apakah kalian dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui titik puncak?

C. Menyelesaikan Masalah dengan Fungsi Kuadrat

Eksplorasi 6.9

Suatu kajian dilakukan untuk mengetahui penghematan bahan bakar (km/liter) terhadap kelajuan mobil (km/jam). $P(x)$ adalah penghematan bahan bakar dan x adalah kelajuan mobil.

Tabel 6.2 Penghematan bahan bakar terhadap kelajuan mobil

$P(x)$	9,5	10,8	11,7	12,3	12,2	12,8	12,7	12,8	12,9	12,2	11,6	10,8
x	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112

Sumber: *Transportation Energy Data Book*

1. Buat grafik $P(x)$ terhadap x dengan bentuk parabola, mungkin saja ada titik-titik yang tidak melalui grafik.
2. Setelah mendapatkan bentuk grafiknya tentukan fungsi kuadratnya.
3. Berapa kelajuan yang menghasilkan penghematan bahan bakar maksimum?

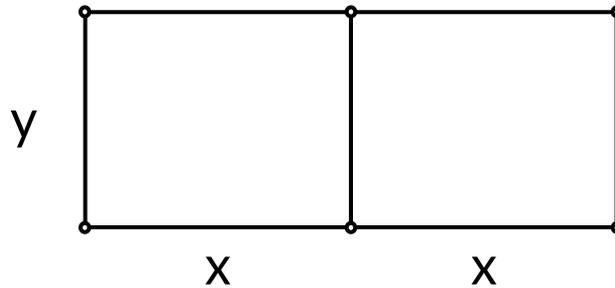
Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan kalkulator atau aplikasi Desmos atau GeoGebra untuk menentukan fungsi kuadrat dari sekelompok data.

Petunjuk menggunakan kalkulator untuk membuat fungsi kuadrat dari sekelompok data.

1. Masukkan data pada kalkulator.
2. Buatlah sebaran data yang tampak pada layar kalkulator.
3. Gunakan fitur *quadratic regression* untuk mendapatkan grafik kuadrat terbaik.
4. Untuk mendapatkan kelajuan yang bersesuaian dengan penghematan bahan bakar maksimum, gunakan fitur maksimum pada kalkulator.

Eksplorasi 6.10

Seorang petani ingin membuat pagar pembatas tanaman seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah ini. Panjang kawat adalah 24 m. Berapa luas maksimum yang dapat dibuat oleh petani?

Dua contoh di atas menunjukkan salah satu kegunaan fungsi kuadrat untuk dapat mengetahui nilai maksimum dan minimum. Kalian sudah mempelajari beberapa cara untuk mendapatkan nilai minimum dan maksimum.

Fungsi kuadrat digunakan dalam berbagai bidang kehidupan, dalam olahraga, bangunan, ekonomi kesehatan dan lainnya.

Harga 1 buku h adalah $900 - 0,25x$ dengan x adalah banyak buku yang diproduksi. JIka pendapatan adalah dari penjualan adalah $R = hx$ tentukan banyak buku yang diproduksi agar diperoleh pendapatan optimal atau maksimal.

Latihan 6.6

1. Bandingkan fungsi linier dengan fungsi kuadrat.

Waktu (detik)	Jarak Tempuh (m)	Jarak Tempuh (m)
0	0	0
1	2	3
2	4	8
3	6	15
4	8	24
5	10	35
6	12	48

Apakah untuk setiap detik kenaikan jarak sama untuk kedua fungsi? Jelaskan.

2. Tabel di bawah menunjukkan hubungan antara kelajuan mobil dengan efisiensi bahan bakar. Buatlah pendekatan grafik fungsi kuadrat dengan $P(x)$ adalah penghematan bahan bakar dan x adalah kelajuan mobil.

Kelajuan (km/jam)	16	32	48	64	80	96	112	128
Bahan bakar (km/liter)	7,5	10,2	12,2	13,2	13,5	12,8	11,3	9,1

Berapa kelajuan yang menghasilkan penghematan maksimum?

3. Bandingkan fungsi eksponen dengan fungsi kuadrat. Apakah fungsi eksponen mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum?

Ayo Berefleksi

1. Apakah kalian dapat membuat grafik fungsi kuadrat jika diberikan sekelompok data?
2. Apakah kalian dapat membuat fungsi kuadrat dari suatu masalah?

Refleksi

1. Bagaimana menuliskan bentuk fungsi kuadrat?
2. Apa peran nilai a dalam fungsi kuadrat?
3. Apa peran nilai c dalam fungsi kuadrat?
4. Apa yang dimaksud dengan titik puncak dari fungsi kuadrat?
5. Apa yang dimaksud dengan diskriminan?
6. Bagaimana mengonstruksi fungsi kuadrat?
7. Bagaimana memplot sekelompok data sebagai fungsi yang mendekati fungsi kuadrat?

Uji Kompetensi

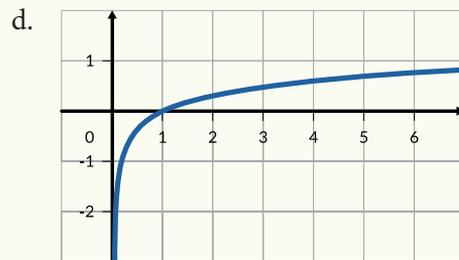
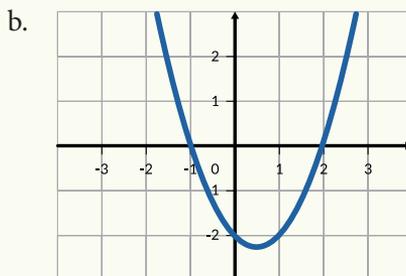
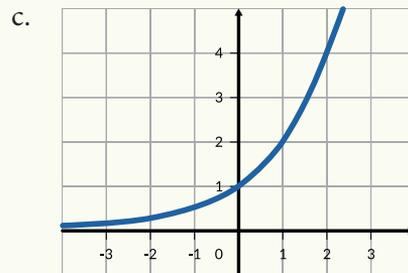
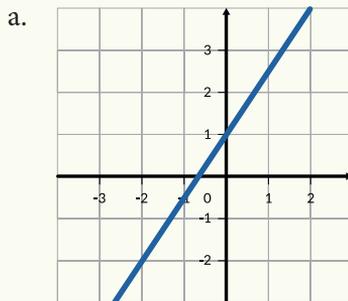
1. Dari grafik berikut, yang manakah yang merupakan grafik fungsi kuadrat?

a.

b.

c.

d.

e.

2. Gambarkan grafik fungsi $y = 2x^2 - 4x - 16$
   a. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu x
   b. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu y
   c. Tentukan sumbu simetrinya.
   d. Apakah fungsi ini memiliki nilai maksimum atau minimum? Tentukan nilainya.

3. Bola dilemparkan ke atas dari tanah dengan kecepatan tertentu sehingga ketinggian yang dicapai merupakan fungsi dari waktu, $h(t) = -5t^2 + 40t$

   Berapa ketinggian maksimum yang dicapai oleh bola?
4. Pendapatan dari hasil penjualan barang $P(q)$ ditentukan oleh jumlah barang yang diproduksi q. $P(q) = -20q^2 + 3000q$. Tentukan pendapatan maksimal atau optimal dan jumlah barang yang bersesuaian dengannya.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-526-5

Bab 7

Statistika

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Membedakan berbagai macam jenis data serta membuat grafik yang sesuai dan merepresentasikan data tersebut, serta melakukan analisis data untuk pengambilan kesimpulan.
2. Menggambar dan menginterpretasikan histogram, diagram garis batang, *line plot*;
3. Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data: *mean*, median, dan modus, pada data tunggal dan data kelompok.
4. Menentukan ukuran penempatan dari kumpulan data: kuartil dan persentil pada data tunggal dan data kelompok.
5. Mengetahui ukuran penyebaran dari kumpulan data: jangkauan inter kuartil, varian, dan simpangan baku pada data tunggal dan data kelompok.
6. Membandingkan 2 kelompok data menggunakan ukuran pemusatan dan penyebaran.

Data Menolong Kita

Dalam kehidupan sehari-hari, kita selalu berhubungan dengan data. Pernahkah kalian melihat kumpulan data, atau pernahkah kalian mengumpulkan data? Di tengah pandemi Covid-19 ini, kita bisa melihat data berapa banyak orang yang terkena infeksi karena virus korona. Dari data harian yang kita kumpulkan, kita bisa melakukan analisis sederhana, seperti daerah mana yang tingkat penularannya sudah semakin turun, mana daerah yang justru tingkat penularannya malah semakin naik. Selain itu, kita juga bisa melihat berapa rata-rata tingkat kesembuhan dari pasien Covid-19 setiap harinya. Untuk dapat menarik kesimpulan dari hal-hal di atas, kita memerlukan data lalu mengolahnya sehingga kita dapat memahami situasi yang sesungguhnya berdasarkan fakta yang aktual, bukan berdasarkan perasaan atau berita hoaks.

Sebagai contoh, ketika vaksin Covid-19 berhasil ditemukan di beberapa negara, muncul berita hoaks yang menyebutkan bahwa vaksin tersebut bermasalah. Dari data yang berhasil dikumpulkan dan diolah, ternyata dari setiap 40.000 orang yang divaksin, rata-rata akan ada 5 orang atau sekitar 0,01% yang mengalami masalah. Hal ini disebabkan berbagai hal seperti usia lanjut, penyakit bawaan, dan sebagainya. Sementara itu, diketahui bahwa rata-rata tingkat kematian dari pasien Covid-19 yang tidak sempat divaksin di Indonesia mencapai 3%, atau jika ada 6.000 pasien baru, maka diperkirakan rata-rata 200 pasien akan berakhir dengan kematian. Dari fakta ini kita bisa melihat bahwa persentase pasien Covid-19 yang tidak divaksin 300 kali lebih berisiko daripada persentase orang yang bermasalah karena vaksin. Wow! 300 kali lebih berisiko tanpa vaksin. Jumlah yang tidak sedikit.

Jadi, dengan melihat data tersebut kita dapat memahami situasi dengan lebih baik sehingga kita mampu mengambil keputusan dengan lebih tepat.

Statistik adalah ilmu yang akan membantu kalian menguasai berbagai hal yang terkait dengan data, mulai dari pengumpulan data, mengolahnya, menganalisis sampai akhirnya mengambil keputusan berdasarkan data.

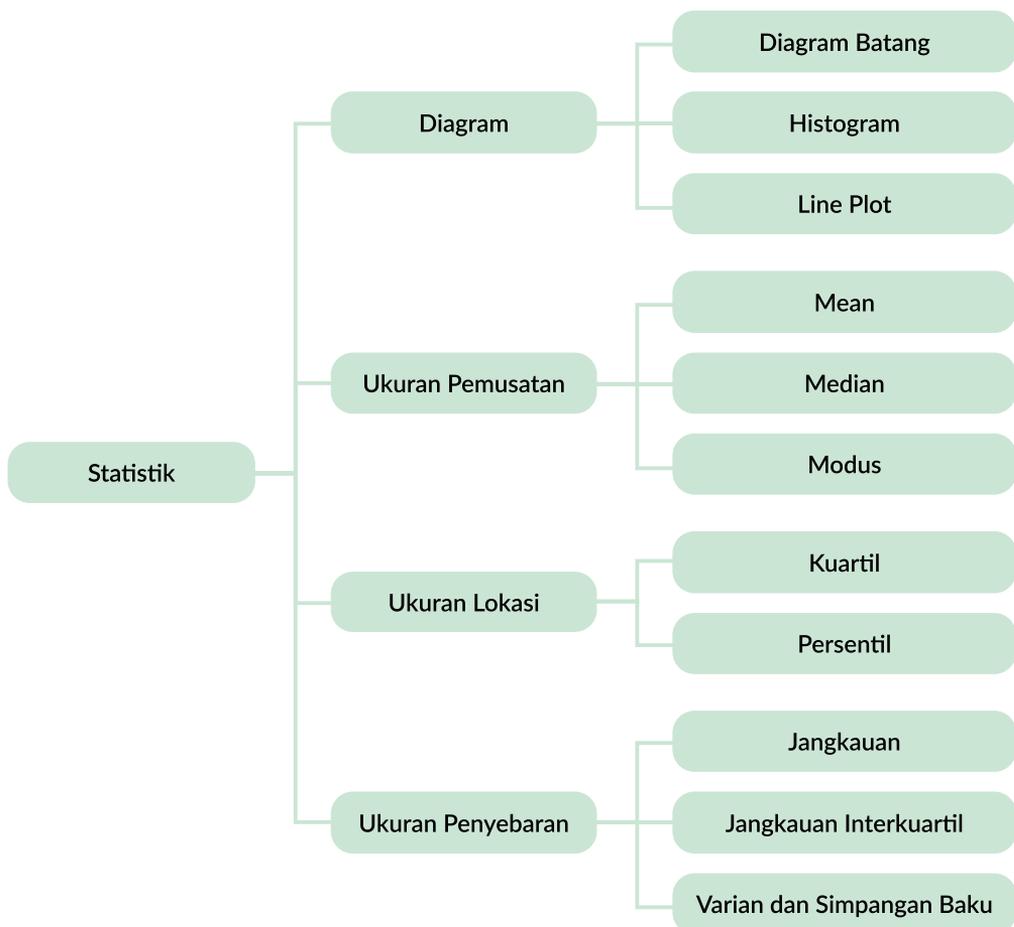
Pada waktu SMP, kalian telah belajar bagaimana untuk melihat ukuran pemusatan dari sekumpulan data, kalian mencari rata-rata atau *mean*, modus, dan median. Saat ini, kalian akan mempelajari jenis data, ukuran penyebaran serta ukuran lokasi dari sekumpulan data supaya kalian dapat menarik kesimpulan dengan lebih baik.

Kata Kunci

Frekuensi, frekuensi relatif, histogram, diagram batang, *line* plot, jangkauan, *mean*, modus, median, simpangan baku, varian, pencilan.

Pertanyaan Pemantik

1. Bagaimana pengolahan data dapat membantu kita dalam pengambilan keputusan?
2. Bagaimana kita menentukan ukuran pemusatan yang paling sesuai dengan konteks masalah yang dihadapi?
3. Bagaimana ukuran pemusatan dan ukuran penyebaran dapat membantu kita untuk membedakan 2 kelompok data?

Peta Konsep

1. Diagram lingkaran sederhana atau diagram batang sederhana dapat digunakan untuk menampilkan informasi yang tersedia, baik dalam bentuk data tunggal maupun dalam bentuk tabel frekuensi.
2. Dari data tunggal sederhana atau data dalam tabel distribusi frekuensi, bisa diperoleh ukuran pemusatan: mean, modus, dan median yang dapat memberikan gambaran tentang kumpulan data tersebut.

Eksplorasi 7.1 Penggunaan Diagram Batang untuk Menganalisis Data

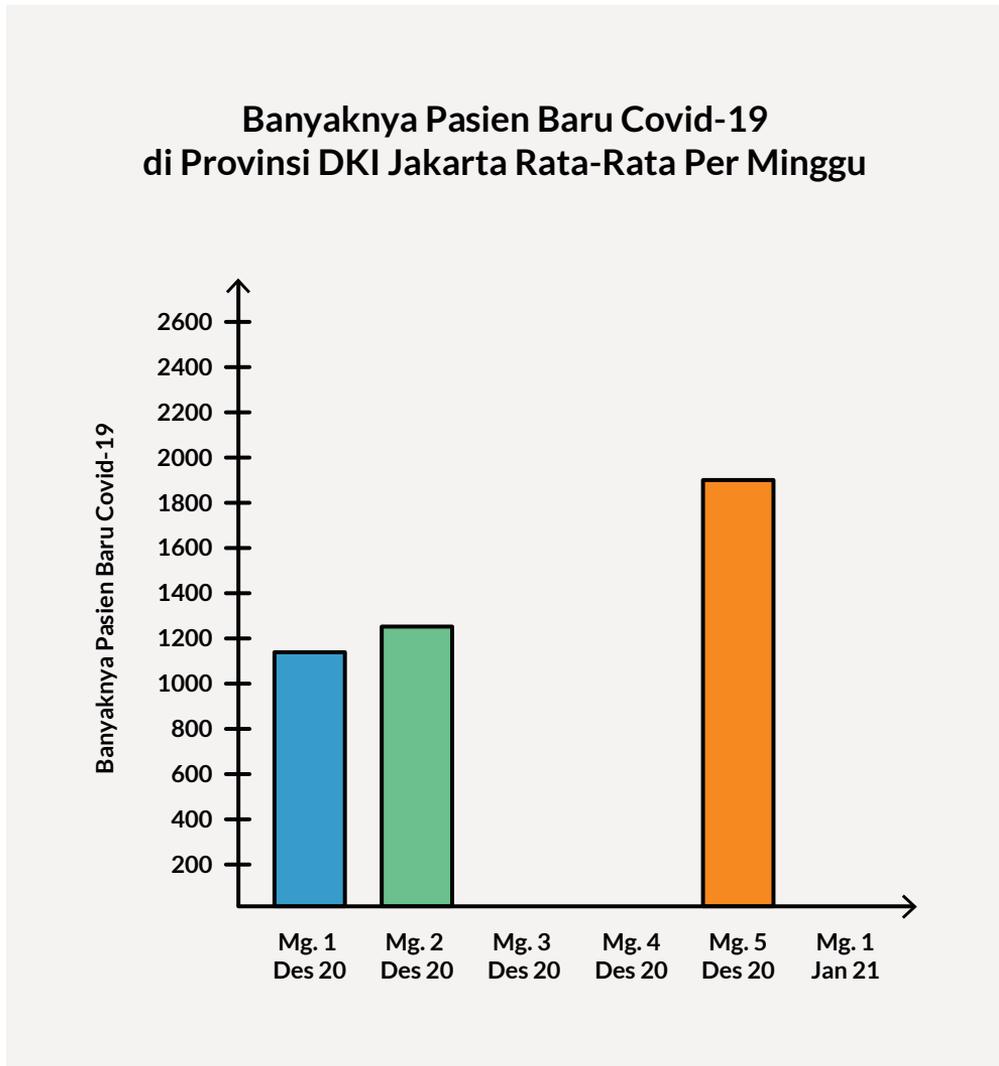
Pandemi Covid-19 melanda seluruh dunia. Setiap harinya jumlah pasien yang terinfeksi virus Covid-19 terus bertambah. Pada tabel berikut, kalian dapat melihat rata-rata pertambahan pasien baru positif Covid-19 setiap minggunya di Provinsi DKI Jakarta.

Tabel 7.1 Frekuensi Banyaknya Pasien Baru Covid-19

Tanggal	Banyaknya Pasien Baru Positif Covid-19*
Minggu ke-1 Desember 2020	1.170
Minggu ke-2 Desember 2020	1.220
Minggu ke-3 Desember 2020	1.520
Minggu ke-4 Desember 2020	1.830
Minggu ke-5 Desember 2020	1.900
Minggu ke-1 Januari 2021	2.120

**jumlah dibulatkan ke puluhan terdekat. Sumber: corona.jakarta.go.id*

1. Dari Tabel 7.1 di atas, pada minggu ke berapakah yang mengalami rata-rata kenaikan jumlah pasien positif Covid-19 yang paling besar?

2. Berdasarkan Tabel 7.1 di atas, lengkapilah diagram batang di bawah ini.

Ayo Berdiskusi

Setiap siswa memberikan estimasinya disertai alasannya.

3. Jika pola penambahan rata-rata mingguan jumlah pasien positif Covid-19 ini terus bertambah, berikan estimasimu untuk jumlah pasien positif Covid-19 pada minggu ke-2 Januari 2021. Jelaskan alasanmu!

Ayo Bernalar

Pemilihan grafik yang tepat akan memberikan gambaran yang lebih tepat.

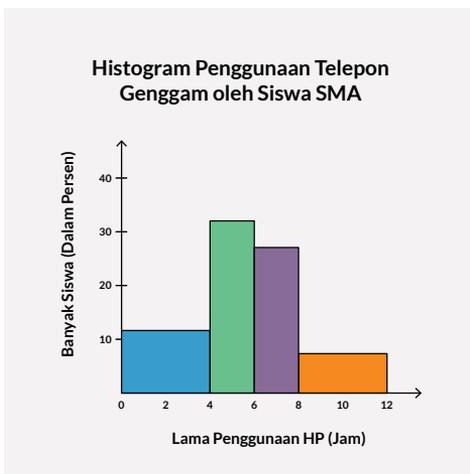
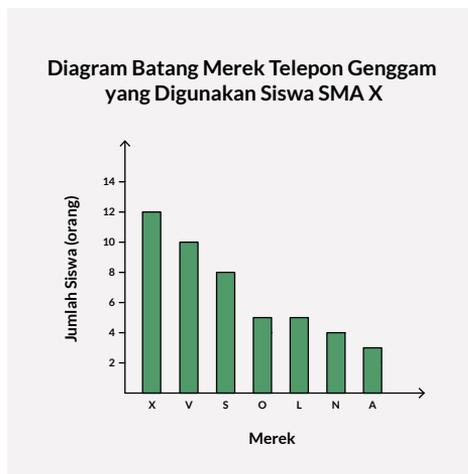
4. Saat menentukan kenaikan jumlah pasien Covid-19 yang paling besar, manakah yang lebih mudah digunakan, tabel atau diagram batang? Jelaskan!

A. Histogram

Ada berbagai tipe diagram. Diagram mana yang paling baik untuk digunakan sangat tergantung pada data apa yang kalian miliki dan informasi apa yang ingin kalian sampaikan.

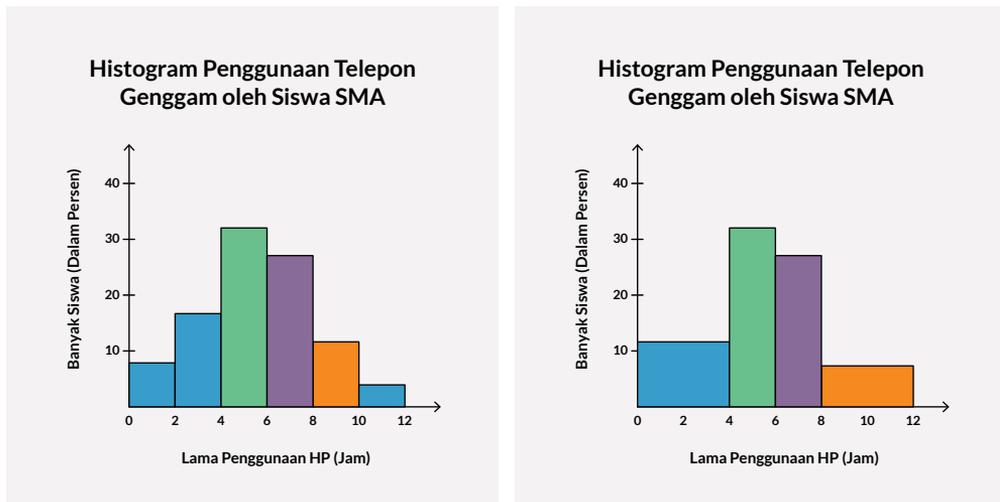
Salah satu diagram yang dapat kalian gunakan adalah histogram. Histogram hampir serupa dengan diagram batang, namun histogram berbeda dengan diagram batang. Gambar 7.1 dan 7.2 menunjukkan contoh histogram dan diagram batang.

Ayo Berdiskusi

Dari Gambar 7.1 dan Gambar 7.2, carilah perbedaan dari histogram dan diagram batang.

Gambar 7.1 Histogram Penggunaan HP oleh Siswa SMA

Gambar 7.2 Diagram Batang Merek HP yang digunakan Siswa SMA

Histogram biasanya digunakan untuk menunjukkan distribusi dari suatu kelompok data, sedangkan diagram batang digunakan untuk membandingkan data. Histogram menampilkan data yang sifatnya kuantitatif dengan rentang data yang dikelompokkan ke dalam interval, sedangkan diagram batang menampilkan data yang sifatnya kategori.

Perbedaan lainnya, pada histogram, gambar batang menempel satu sama lain, sedangkan pada diagram batang, ada spasi antarbatang. Perbedaan terakhir, diagram batang biasanya memiliki batang dengan lebar yang sama, sedangkan lebar batang dalam histogram tidak perlu sama selama luas totalnya seratus persen jika digunakan persen atau luas total sama dengan jumlah data. Oleh karena itu, frekuensi data dalam diagram batang dilihat dari panjang batang, sedangkan frekuensi dalam histogram diberikan berdasarkan area pada masing-masing batang.

Perhatikan Gambar 7.3. Kedua histogram menampilkan data yang sama. Cobalah mencari bagaimana kedua histogram ini menjelaskan data yang sama walaupun terlihat berbeda.

Gambar 7.3 Tampilan Data yang Sama Menggunakan Dua Histogram yang Berbeda

Kalian bisa menggunakan pendekatan luas persegi panjang dalam menggambar histogram.

Pada histogram sebelah kiri:

- Frekuensi Kelas 0-2 adalah 8, luas persegi panjangnya adalah $2 \times 8 = 16$
- Frekuensi Kelas 2-4 adalah 16, luas persegi panjangnya adalah $2 \times 16 = 32$
- Luas gabungan kedua kelas tersebut adalah $16 + 32 = 48$

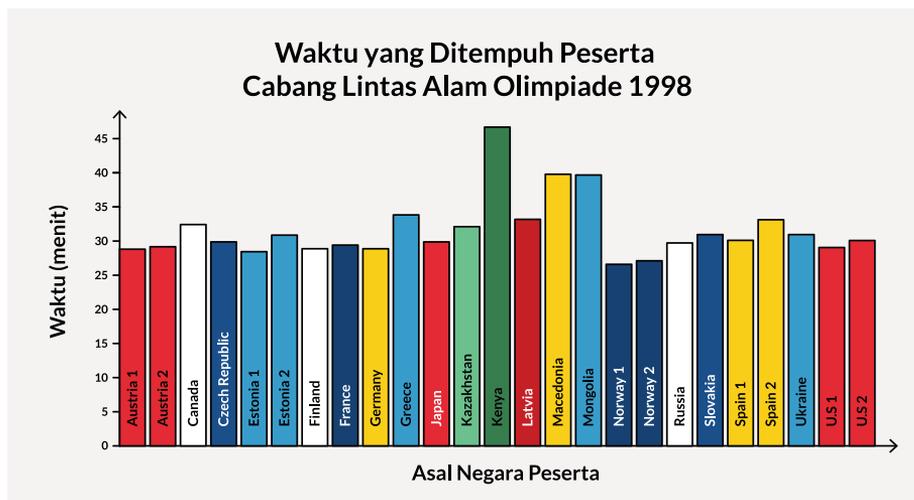
Pada histogram sebelah kanan:

- Frekuensi Kelas 0-4 adalah 12, luas persegi panjangnya adalah $4 \times 12 = 48$

Jadi, kelas 0-2 dan 2-4 pada histogram kiri memiliki luas yang sama dengan kelas 2-4 pada histogram kanan, sehingga dapat dikatakan bahwa histogram kiri dan histogram kanan menjelaskan data yang sama.

Coba kalian buktikan mengapa kelas 8-10 dan kelas 10-12 pada histogram kiri dapat digabung menjadi kelas 8-12 pada histogram kanan. Jelaskan jawabanmu!

Latihan 7.1

1. Perhatikan diagram batang berikut. Diagram berikut menunjukkan waktu yang ditempuh oleh para atlet di Olimpiade 1998 cabang Lintas Alam 10 km.

Gambar 7.4 Diagram Batang Waktu yang Ditempuh Peserta Lintas Alam Olimpiade 1998
Sumber: https://www.olympic.org/nagano-1998/cross-country-skiing

   a. Dari Gambar 7.4, ada berapa atlet yang berpartisipasi dalam cabang lintas alam? Ada berapa negara yang berpartisipasi dalam cabang ini?

Ayo Berpikir Kritis

Untuk dapat memahami diagram dengan lebih baik, maka kalian perlu memahami situasi dan konteks dari diagram.

b. Peserta dari negara manakah yang mendapatkan medali emas? Berapakah catatan waktunya?

c. Berapakah atlet yang menyelesaikan lomba ini dengan interval catatan waktu antara 31 menit dan 32 menit 59 detik?

Ayo Berpikir Kreatif

Ayo berpikir kreatif dalam menyesuaikan tampilan diagram batang untuk menjawab permasalahan.

d. Gambar 7.4 disusun berdasarkan abjad dari nama depan asal negara atlet. Pikirkanlah cara lain untuk menyusun diagram batang ini. Pertanyaan seperti apakah yang mudah untuk dijawab dari susunan diagram batang yang baru tersebut?

Saat menjawab soal bagian c) di atas, mungkin kalian memerlukan waktu yang lebih lama karena harus melihat catatan waktu dari tiap atlet peserta. Meskipun kalian mudah membaca catatan waktu dari tiap atlet, tidak terlalu mudah untuk menemukan banyaknya atlet yang menyelesaikan lomba dengan interval catatan waktu tertentu.

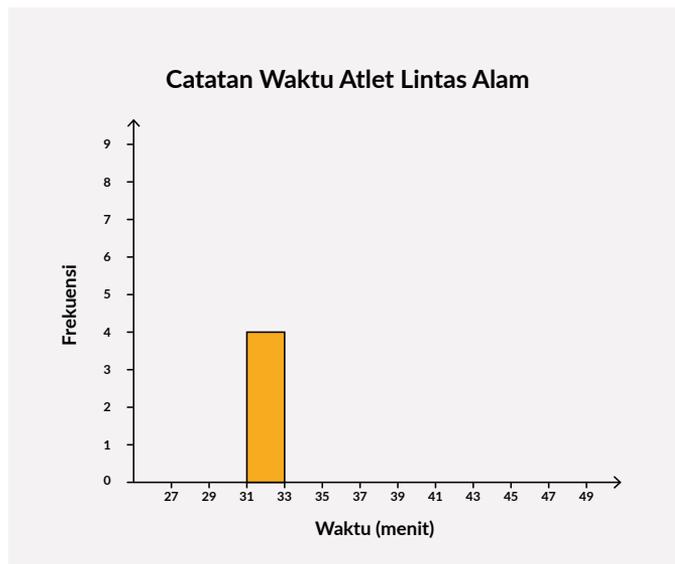
Sekarang, kalian akan menggunakan histogram untuk menampilkan data catatan waktu dari para atlet. Dalam histogram, data dibagi ke dalam interval yang sama, dengan 1 gambar batang untuk setiap interval. Tinggi dari setiap batang menunjukkan banyaknya data yang masuk dalam interval tersebut.

2. Dari data catatan waktu para atlet cabang Lintas Alam pada Gambar 7.4,

   a. Lengkapilah kolom Frekuensi pada Tabel 7.2.

Tabel 7.2 Tabel Distribusi Frekuensi Catatan Waktu Atlet

Catatan Waktu Atlet (menit:detik)	Frekuensi
27:00–28:59	
29:00–30:59	
31:00–32:59	
33:00–36:59	
37:00–38:59	
39:00–40:59	
41:00–42:59	
43:00–44:59	
45:00–46:59	
47:00–48:59	

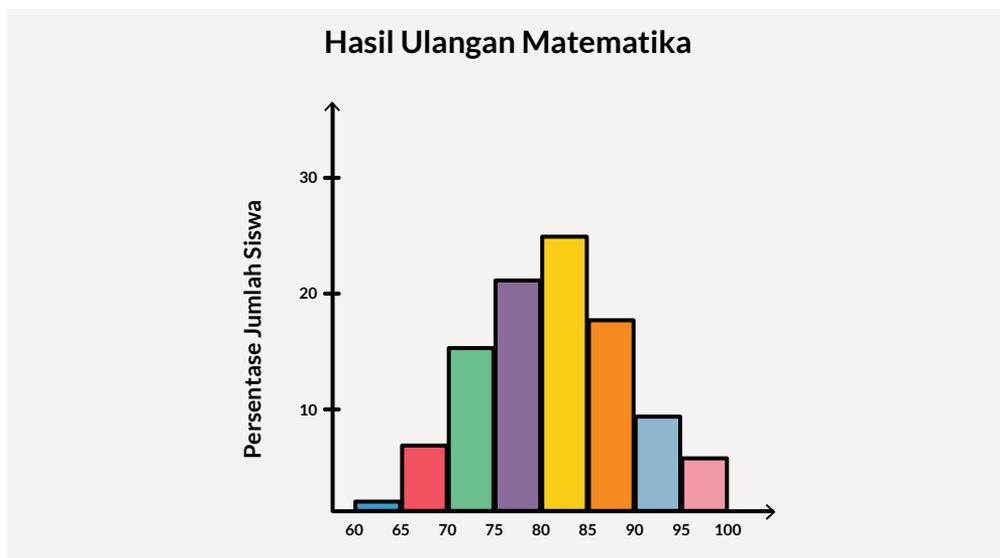
b. Buatlah histogram yang menunjukkan banyaknya atlet yang menyelesaikan lomba Lintas Alam dalam tiap interval catatan waktu. Satu batang untuk interval waktu 31:00–32:59 telah digambar pada histogram di bawah ini.

c. Interval waktu manakah yang memiliki jumlah atlet paling banyak?

d. Bentuk dari susunan batang-batang pada histogram menunjukkan distribusi dari data-data yang ada. Distribusi data menunjukkan bagaimana data tersebar, seperti di mana kebanyakan data berada, di mana tidak ditemui data apa pun, dan di mana data sangat sedikit. Apa yang dapat kamu simpulkan dari distribusi data catatan waktu para atlet di atas?

B. Frekuensi Relatif

Frekuensi pada histogram tidak harus selalu menunjukkan banyaknya data yang ada dalam setiap interval. Histogram juga dapat menggunakan persentase sebagai frekuensi relatif dari setiap kelas intervalnya.

Eksplorasi 7.2 Frekuensi Relatif dalam Histogram

Ayo berdiskusi dengan menjawab pertanyaan berikut.

Gambar 7.5 Histogram Hasil Nilai Ulangan Matematika

Dari histogram pada Gambar 7.5, ditunjukkan bahwa ada 16% siswa yang mendapatkan nilai matematika antara 70 sampai 75.

- Apakah ini berarti ada 16 siswa yang berada di kelas tersebut? Jelaskan!
- Interval kelas manakah yang memiliki persentase terbesar? Berapa persen kelas dengan interval tersebut?

Misalkan ada 200 siswa yang mengikuti ulangan matematika tersebut. Berapakah banyaknya siswa yang mendapatkan nilai 85 ke atas tapi di bawah 90?

Apabila kalian menambahkan seluruh persen pada setiap interval, berapakah seharusnya jumlah total persen yang kalian peroleh? Jelaskan!

Histogram dengan frekuensi relatif sangat efektif jika digunakan untuk membandingkan dua kelompok data dengan jumlah data yang berbeda, misalnya, jika kalian ingin membandingkan data harian berapa persen penduduk di Jakarta dengan penduduk di Bali yang telah sembuh dari Covid-19. Karena jumlah total penduduk yang terinfeksi Covid-19 di Jakarta berbeda dengan Bali, maka penggunaan persentase sebagai frekuensi relatif memberikan gambaran yang lebih baik.

Latihan 7.2

Ayo Bekerja Sama

Ayo bekerja sama dalam melengkapi tabel di bawah ini agar waktu yang diperlukan menjadi lebih sedikit.

1. Kalian pernah belajar mengenai perkalian dari 0×0 sampai 12×12. Lengkapilah tabel perkalian di bawah ini.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													

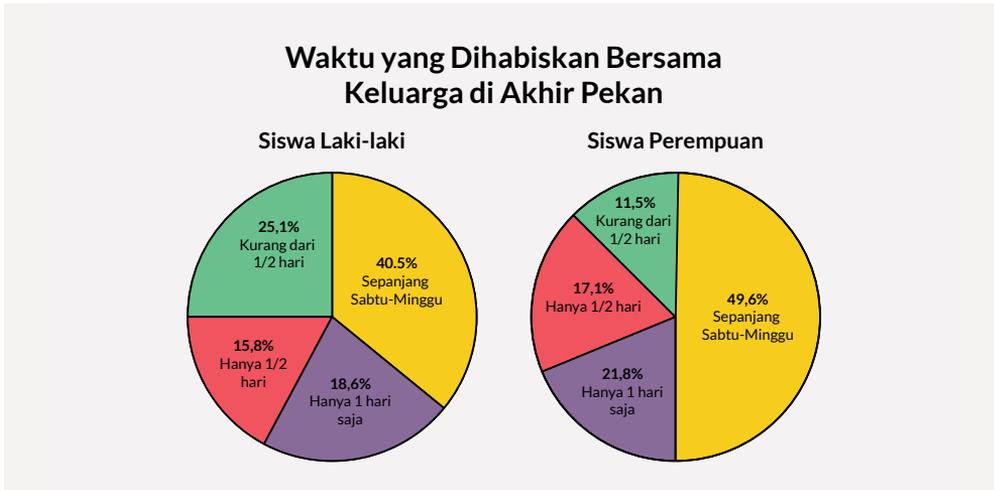
Kalian bisa membuat kelompok hasil perkalian di atas dengan mengelompokkan ke dalam kelas-kelas dengan panjang kelas 10. Sebagai contoh, kelas pertama adalah kelas 0-9, kelas kedua: 10-19, kelas ketiga: 20-29, dan seterusnya sampai kelas: 140-149.

a. Buatlah tabel frekuensi dengan panjang kelas 10.
b. Lalu gambarlah histogramnya.
c. Menurut kalian, apakah hasil kali tersebut akan terdistribusi merata ke setiap kelas yang panjang kelasnya 10? Atau apakah ada kelas tertentu yang memiliki hasil kali lebih banyak dari kelas lainnya?
d. Sekarang buatlah histogram lainnya dengan panjang kelas 20, dimulai dari 0-19, 20-39, 40-59, dan seterusnya.
e. Jelaskanlah persamaan dan perbedaan dari kedua histogram yang kalian hasilkan.

2. Dari sebuah survei terhadap siswa SMP mengenai berapa banyak waktu yang mereka habiskan bersama orang tua mereka di akhir pekan, diperoleh hasil survei sebagai berikut.

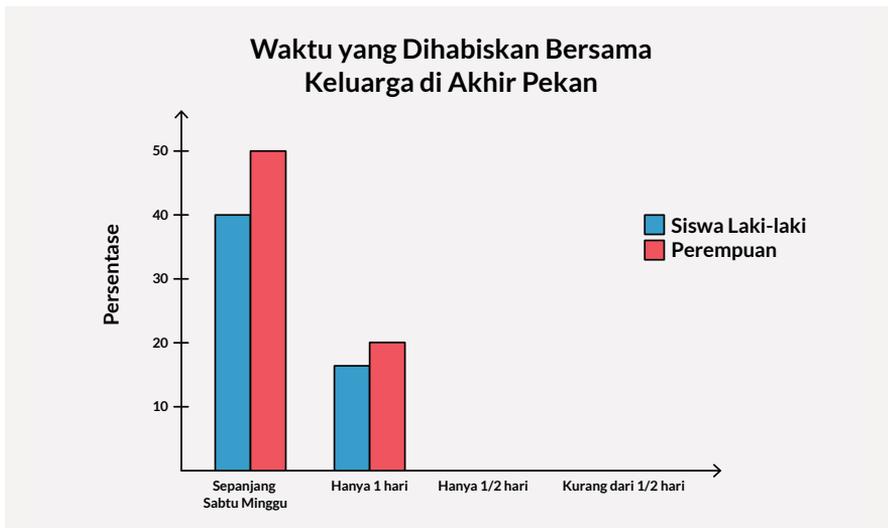
Tabel 7.3 Waktu yang Dihabiskan Siswa di Akhir Pekan

Waktu yang Dihabiskan Bersama Keluarga di Akhir Pekan	Siswa Laki-Laki (persen)	Siswa Perempuan (persen)
Sepanjang Sabtu dan Minggu	40,5	49,6
Hanya di salah satu hari saja	18,6	21,8
Hanya ½ hari saja	15,8	17,1
Kurang dari ½ hari	25,1	11,5

Jika kalian ingin membandingkan hasil survei siswa laki-laki dengan hasil survei siswa perempuan, kalian bisa menampilkannya dalam 2 buah diagram lingkaran.

Gambar 7.6 Perbandingan Diagram Lingkaran Siswa Laki-Laki dan Perempuan

a. Mengapa data yang ditampilkan dalam bentuk persentase?

b. Kalian juga bisa menampilkan data-data di atas dalam grafik batang ganda, di mana dalam setiap kategori memiliki 2 batang, yang satu menunjukkan persentase banyaknya siswa laki-laki di kategori tersebut dan yang lainnya menunjukkan persentase siswa perempuan.

   Lengkapilah diagram batang berikut.

Gambar 7.7 Diagram Batang Ganda Waktu Akhir Pekan Siswa

Ayo Bernalar

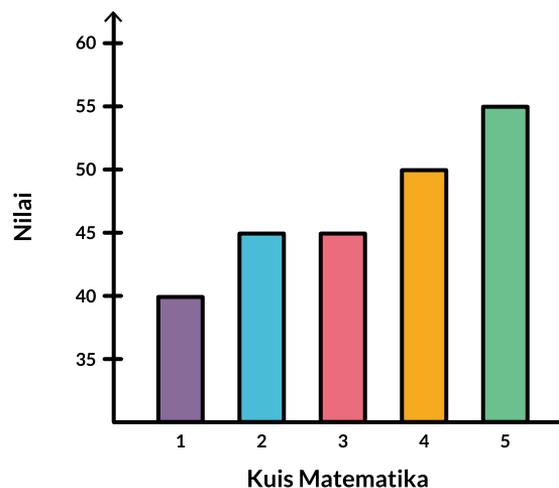
Dengan memilih representasi grafik yang tepat, akan memudahkan kita dalam membandingkan 2 kelompok data.

c. Menurut kalian, diagram manakah yang lebih mudah digunakan untuk membandingkan 2 kelompok data? Berikan alasan dari pilihanmu.

3. Dani sering bermain *games online* sehingga nilai kuis matematikanya jelek. Orang tua Dani melarang Dani untuk bermain *games online* sampai hasil nilai kuis matematika Dani berubah secara signifikan. Guru matematika Dani setiap minggu memberikan kuis matematika dengan nilai tertinggi 100. Dani membuat grafik batang untuk menunjukkan kepada orang tuanya bahwa nilai kuisnya sudah membaik dalam 5 minggu terakhir.

Ayo Berpikir Kritis

a. Panjang batang nilai kuis 5 Dani tiga kali lebih tinggi dari panjang batang nilai kuis 1-nya. Apakah nilai kuis 5-nya tiga kali dari nilai kuis 1-nya?

b. Orang tua Dani mengatakan bahwa grafik batang yang dibuat Dani menyesatkan karena dari grafik ini terlihat ada perbaikan signifikan dari nilai kuis Dani dibandingkan dengan kenyataannya. Hal manakah pada grafik ini yang menyebabkan grafik ini memberikan kesimpulan yang salah?

Gambar 7.8 Diagram Batang Buatan Dani

c. Buatlah diagram batang yang baru yang dapat memberikan hasil yang lebih akurat dan menggambarkan performa Dani yang sebenarnya di kuis matematika mingguan.

Ayo Berefleksi

Dalam subbab ini, kalian sudah belajar mengenai diagram batang dan histogram. Selain itu, kalian juga telah mengenal frekuensi dan frekuensi relatif dalam diagram batang dan histogram.

a. Apa saja perbedaan diagram batang dengan histogram?

b. Kapan kita sebaiknya menggunakan frekuensi relatif daripada frekuensi?

C. Ukuran Pemusatan

1. Modus dan Median

Modus dan median adalah dua ukuran pemusatan untuk melihat kecenderungan kumpulan data.

Median adalah nilai data yang berada tepat di tengah ketika seluruh data diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar. Untuk mencari letak median, bagilah banyaknya data dengan 2.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m, maka median terletak di tengah-tengah antara urutan ke-m dan ke-$(m + 1)$.
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka median terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Modus dari sebuah kumpulan data adalah data yang paling sering muncul atau memiliki frekuensi paling besar. Kedua ukuran pemusatan ini memiliki keuntungan, yaitu tidak terpengaruh jika kumpulan data memiliki data pencilan atau data yang berbeda dari kumpulan datanya.

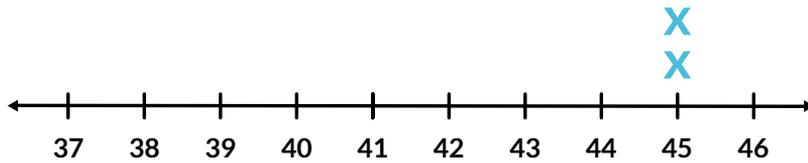
Selain modus dan median, kalian bisa melihat rentang dari kumpulan data melalui *range* atau jangkauan. **Jangkauan** adalah selisih antara data terkecil dengan data terbesar.

Eksplorasi 7.3 *Line Plot*

Basket merupakan olahraga yang digandrungi banyak siswa SMA/MA, khususnya pria. Untuk dapat bermain basket, kalian perlu menggunakan sepatu olahraga. Berikut adalah data penjualan sepatu olahraga di toko A yang terdiri dari beberapa merek dan ukuran pada akhir pekan pertama bulan Januari.

Tabel 7.4 Data Penjualan Sepatu di Toko A

No	Merek	Ukuran	No	Merek	Ukuran
1	A	43	14	A	44
2	B	44	15	C	40
3	C	38	16	D	41
4	A	43	17	B	42
5	C	44	18	D	43
6	D	42	19	E	42
7	A	42	20	A	40
8	A	39	21	A	45
9	B	43	22	C	41
10	E	43	23	A	41
11	C	44	24	A	42
12	E	45	25	C	43
13	B	44			

a. Buatlah diagram *line plot* untuk menunjukkan ukuran sepatu yang terjual pada akhir pekan pertama bulan Januari. Diagram line plot adalah sebuah garis bilangan dengan banyaknya tanda X yang menunjukkan banyaknya data yang muncul dengan nilai tertentu. Sebagai contoh, 45 muncul tiga kali. Jadi, kalian tuliskan tanda X di atas angka 45.

Gambar 7.9 *Line Plot* Ukuran Sepatu

b. Jelaskan bentuk dari line plot yang kamu hasilkan. Bagaimana bentuk line plot ini bisa menjelaskan distribusi data ukuran sepatu di atas?

Ketika kalian mendeskripsikan sebuah kumpulan data, biasanya kalian juga perlu menentukan data terkecil dan data terbesar dari kumpulan data tersebut.

c. Tentukanlah data terkecil dan data terbesar dari kumpulan data ukuran sepatu yang terjual.
d. Bagaimana kalian dapat menemukan data terkecil dan data terbesar dengan melihat diagram *line plot*?
e. Tentukanlah jangkauan dari data ukuran sepatu pada Tabel 7.4.
f. Tentukanlah modus dari data ukuran sepatu pada Tabel 7.4.
g. Bagaimana kalian bisa menentukan modus sekumpulan data dari diagram *line plot*?
h. Urutkanlah data ukuran sepatu di atas dari yang terkecil sampai yang terbesar, lalu tentukanlah mediannya.
i. Bagaimana kalian dapat menentukan median dari sekumpulan data dengan melihat diagram *line plot*?

Ayo Berdiskusi

Jika terjadi penambahan data baru, bagaimana modus, median, dan jangkauan akan terpengaruh?

j. Ternyata ada data penjualan di toko sepatu A yang tertinggal. Data-data tersebut adalah 41, 43, 44, 44, dan 46. Berapakah nilai dari jangkauannya sekarang? Berapakah modusnya sekarang?

Bagaimana perbedaan mencari median pada kelompok dengan banyaknya data ganjil dan genap?

k. Ketika banyaknya data adalah bilangan genap, maka tidak ada data yang diambil sebagai median tunggal. Dalam hal ini, median diambil dari nilai tengah di antara dua nilai data yang berada di tengah. Carilah median dari kumpulan data yang baru.

2. *Mean* (Rerata atau Rata-Rata)

Rerata atau *mean* adalah ukuran pemusatan lain selain median dan modus. *Mean* dari sebuah kumpulan data adalah bilangan yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata ke seluruh anggota dari kumpulan data. Kalian bisa menghitung *mean* dengan cara menambahkan seluruh nilai data dan membagi dengan total banyaknya data.

Atau jika ditulis dalam bentuk formula: $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ di mana:

$\bar{x}$ adalah *mean*, dibaca x bar. Σx menyatakan jumlah total data dan n menunjukkan banyaknya data.

Eksplorasi 7.4 *Mean*

OSIS Sekolah A yang beranggotakan 10 orang akan melakukan aksi sosial untuk membantu para korban bencana alam. Mereka sepakat untuk mengumpulkan pakaian bekas layak pakai untuk membantu para korban bencana alam. Adapun jumlah baju yang dikumpulkan setiap pengurus OSIS adalah sebagai berikut.

3 5 7 10 5 3 4 6 9 8

a. Tentukanlah nilai *mean*, median, dan modus dari jumlah baju yang dikumpulkan oleh para pengurus tersebut.

Bagaimana penambahan data berpengaruh terhadap ukuran pemusatan?

b. Keesokan harinya, ada dua siswa yang bukan pengurus OSIS, namun mereka terinspirasi dengan aksi sosial yang dilakukan oleh para pengurus OSIS. Mereka langsung ikut menyumbangkan baju layak pakai sebanyak 20 dan 22 buah. Tentukan *mean*, median, dan modus dari kumpulan data yang baru.

3. Penggunaan Ukuran Pemusatan

Setelah kalian mempelajari cara menentukan *mean*, median, dan modus, maka hal yang juga penting adalah mengetahui karakteristik dari setiap ukuran pemusatan ini, agar kita dapat memilih ukuran pemusatan mana yang paling tepat sesuai dengan konteks permasalahan.

Eksplorasi 7.5

Masih dari kisah para pengurus OSIS Sekolah A sebelumnya. Bagaimana hasil pengamatan kalian setelah membandingkan *mean*, median, dan modus data sumbangan 10 pengurus OSIS dengan *mean*, modus dan median data sumbangan ke-12 siswa?

Di antara *mean*, median, dan modus, manakah nilai yang tetap? Manakah nilai yang berubah? Jelaskan!

Cobalah berpikir ekstrem dengan mengganti 1 data dengan nilai yang sangat berbeda, lalu amati perubahannya.

Bagaimana jika seandainya siswa ke-12 bukan menyumbang 22 buah, namun menyumbang 100 pakaian. Menurut kalian, tanpa menghitung dulu *mean*, median, dan modus yang baru, manakah di antara *mean*, median, dan modus yang nilainya berubah? Manakah yang nilainya tetap? Jelaskan!

Sekarang cobalah kalian menghitung *mean*, median, dan modus yang baru. Apakah analisis kalian di atas sudah benar?

Modus	Digunakan ketika jenis data adalah data kualitatif, atau jenis data kuantitatif yang memiliki 1 modus atau 2 modus (bimodal).
Median	Digunakan untuk jenis data kuantitatif. Biasanya median digunakan ketika ada data yang memiliki nilai yang ekstrem (pencilan), sehingga data ekstrem tersebut tidak memiliki dampak yang besar seperti pada *mean*.
Mean	Digunakan untuk jenis data kuantitatif dan menggunakan seluruh data. Namun, mean terpengaruh oleh data dengan nilai yang ekstrem.

a. *Mean*/Rata-Rata Data Kelompok

Data penjualan sepatu di toko A pada Tabel 7.4 merupakan kumpulan data tunggal. Kalian dapat mengelompokkan data-data ini menjadi data kelompok dengan panjang kelas sama dengan 2 sehingga menjadi tabel frekuensi data kelompok sebagai berikut.

Tabel 7.5 Distribusi Frekuensi Data Kelompok Penjualan Sepatu di Toko A

Ukuran	37-39	40-42	43-45	46-48
Frekuensi	2	11	16	1

Cara menghitung rata-rata dari data kelompok di atas adalah menggunakan nilai tengah dari tiap kelompok. Data tunggal dalam kelompok diasumsikan tersebar secara merata, sehingga nilai tengah dari setiap kelompok dapat diasumsikan mewakili kelompok tersebut.

Nilai tengah kelompok 37-39 adalah 38, Nilai tengah kelompok 40-42 adalah 41, Nilai tengah kelompok 43-45 adalah 44, dan Nilai tengah kelompok 46-48 adalah 47.

Rata-rata dari kelompok di atas:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{(2 \times 38) + (11 \times 41) + (16 \times 44) + (1 \times 47)}{2 + 11 + 16 + 1}$$

$$= \frac{1278}{30} = 42,6$$

Bagaimana rata-rata data tunggal dibandingkan dengan rata-rata data kelompok? Apakah masih bisa merepresentasikan kelompok data?

Bandingkanlah hasil rata-rata data kelompok ini dengan hasil rata-rata data tunggal dari penjualan sepatu di toko A. Apakah menurut kalian, kedua hasil rata-rata masih cukup dekat?

Latihan 7.3

1. Jika data penjualan sepatu di toko A pada Tabel 7.4 kita ubah menjadi tabel Frekuensi data tunggal sebagai berikut:

Tabel 7.6 Tabel Frekuensi Data Tunggal Penjualan Sepatu di Toko A

Ukuran	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Frekuensi	1	1	2	4	5	7	7	2	1

   a. Tentukanlah modus, median, dan *mean* dari kumpulan data di atas.

Mengambil keputusan berdasarkan data.

   b. Untuk menentukan rencana pemesanan sepatu bulan depan, jelaskan mengapa pemilik toko sebaiknya menggunakan modus.

2. Data berikut menunjukkan jumlah kue yang dijual melalui situs online setiap harinya:

   0 3 2 7 4 2 3 0 4 0 6 5 5 2 4 0

   a. Tentukanlah modus dan median dari data di atas.
   b. Menurutmu, ukuran pemusatan manakah yang lebih untuk data di atas, modus atau median? Jelaskan!

Ayo Berpikir Kreatif

3. Buatlah kumpulan data dengan banyaknya data, ada sebanyak 13 buah dan memenuhi kondisi:
   - Data terkecil = 3
   - Data terbesar = 13
   - Modus = 4, dan
   - Median = 8

4. Dari 2 kelas siswa SD di sekolah "Pancasila" diperoleh data tinggi siswa (dalam cm) sebagai berikut:
   - Kelas A: 117, 117, 119, 122, 127, 127, 114, 137, 99, 107, 114, 127, 122, 114, 120, 125, 119
   - Kelas B: 130, 147, 137, 142, 140, 135, 135, 142, 142, 137, 135, 132, 135, 120, 119, 125, 142

   a. Untuk masing-masing kelas, buatlah grafik *line plot*.

   b. Tentukanlah *range*, modus, dan median dari setiap kelas.

   c. Kedua kelas berasal dari tingkat yang berbeda. Kelas manakah menurut kalian yang memiliki tingkat yang lebih tinggi?

   d. Berapa persen siswa dari kelas B yang memiliki tinggi sama atau lebih tinggi dari median tinggi badan siswa kelas A?

5. Pernahkah kalian mendengar bahwa Indonesia adalah salah satu paru-paru dunia? Hutan tropis di Indonesia memiliki peranan yang sangat penting untuk memberikan sumbangan terhadap lingkungan dunia. Pohon Borneo adalah salah satu jenis pohon yang banyak ditemukan di hutan Kalimantan.

   Tabel 7.7 Tabel Frekuensi Data Kelompok Diameter Pohon Borneo di Daerah A

Diameter Pohon Borneo (cm)	19-21	22-24	25-27	28-30
Frekuensi	4	17	25	14

   a. Tentukanlah kelas modus.

   b. Prediksi nilai *mean* dari data kelompok di atas.

   c. Tentukan kelas median.

Dalam subbab ini, kalian sudah belajar mengenai ukuran pemusatan: mean, median, dan modus. Kalian juga telah menentukan manakah ukuran pemusatan yang sesuai.

a. Ukuran pemusatan manakah yang terpengaruh dengan pencilan? Manakah yang tidak terpengaruh pencilan?
b. Saat data tunggal dikelompokkan, lalu kalian menghitung mean data tunggal dan mean data kelompok, bagaimana hasil dari kedua mean tersebut? Apakah berbeda jauh atau berbeda sedikit?

b. Median dan Kelas Modus Data Kelompok

Eksplorasi 7.6 Membandingkan Modus dan Median Data Tunggal dengan Data Kelompok

Kita masih akan menggunakan data penjualan sepatu di toko A pada Tabel 7.5 yang merupakan Tabel Distribusi Data Kelompok.

Sekarang, mari kita bandingkan modus. Pada data tunggal, kelompok data ini memiliki dua modus atau disebut bimodal, yaitu 43 dan 44 karena kedua data tersebut memiliki frekuensi yang paling tinggi yaitu 7.

Pada data kelompok, kita dapat melihat bahwa kelas modus adalah kelas 43-45 yaitu dengan frekuensi 16. Jadi, walaupun data tunggal diubah ke dalam data kelompok, ternyata kelas modus tetap dapat memberikan gambaran estimasi di mana data modus berada.

Bagaimana dengan median?

Untuk data tunggal, karena jumlah data ada sebanyak 30 data, maka karena 30 dibagi 2 adalah 15, sehingga median terletak di antara data ke-15 dan data ke-16. Data yang terletak di urutan ke-15 adalah 43 dan data di urutan ke-16 adalah 43. Maka median dari kelompok data tunggal adalah $\frac{43+43}{2} = 43$.

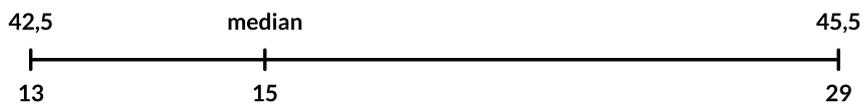
Untuk mencari median dari data kelompok, kita akan menggunakan interpolasi. Bagaimana interpolasi bekerja? Pertama, tentukan dahulu kelas median. Karena

jumlah data sebanyak 30, maka data median berada di urutan ke $\frac{1}{2} \times 30 = 15$. Data ke-15 berada di kelas 43-45.

Tepi bawah kelas 43-45 adalah 42,5 dan tepi atasnya adalah 45,5. Setelah itu kalian perlu menentukan banyaknya data yang nilainya di bawah 42,5 dan 45,5.

Banyaknya data yang nilainya di bawah 42,5 yaitu banyaknya data di kelas 37-39 dan kelas 40-42 yaitu ada sebanyak 2 + 11 = 13.

Banyaknya data yang nilainya di bawah 45,5 yaitu banyaknya data di kelas 37-39, kelas 40-42 dan kelas 43-45 yaitu ada sebanyak 2 + 11 + 16 = 29.

Semua data yang diperoleh, diletakkan dalam garis bilangan berikut:

Bilangan di atas garis merupakan tepi bawah dan tepi atas dari kelas median. Bilangan di bawah garis merupakan banyaknya data yang terletak di bawah 42,5, di bawah urutan median, dan di bawah 45,5.

Lalu, kalian tinggal membandingkan selisih dari bilangan-bilangan yang ada pada garis bilangan tersebut:

$$\frac{\text{Median} - 42,5}{15 - 13} = \frac{45,5 - 42,5}{29 - 13}$$

$$\frac{\text{Median} - 42,5}{2} = \frac{3}{16}$$

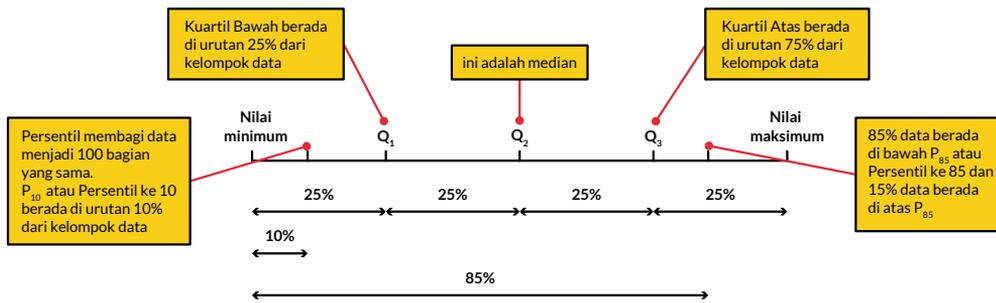
$$\text{Median} - 42,5 = \frac{6}{16} \approx 0,375$$

$$\text{Median} = 42,5 + 0,375 = 42,875$$

Ternyata median dari data berkelompok, yaitu 42,875 tidak jauh berbeda dengan median dari data tunggal, yaitu 43. Jadi, walaupun data dikelompokkan, median data kelompok dapat tetap mewakili median dari data tunggal.

D. Ukuran Penempatan (*Measure of Location*)

1. Kuartil Data Tunggal

Sebelumnya kalian telah mempelajari mengenai median. Median membagi kumpulan data yang telah diurutkan menjadi 2 sama besar (50%). Kalian bisa menentukan ukuran penempatan lainnya seperti kuartil dan persentil.

Gambar 7.10 Letak Kuartil dan Persentil dalam Kelompok Data

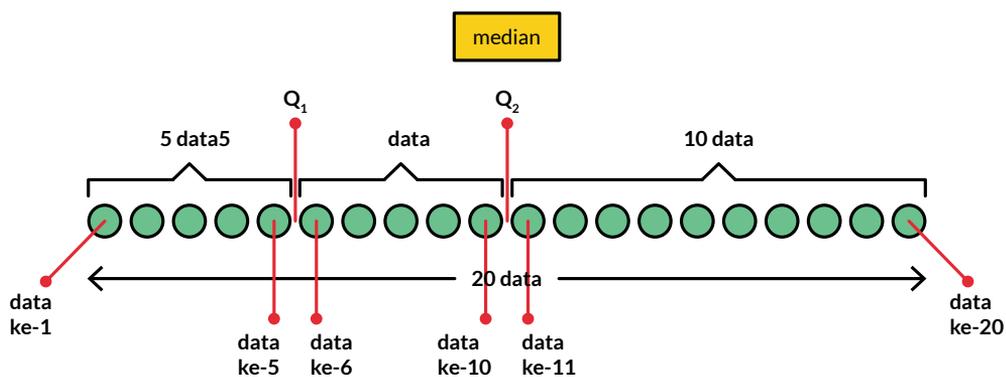
Serupa dengan mencari letak median, maka untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_1, bagilah banyaknya data dengan 4.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m, maka Q_1 terletak di tengah-tengah antara urutan ke-m dan ke-$(m + 1)$.
- Tetapi jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_2 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Misalkan jika banyaknya data ada 20 buah, di manakah letak median? Di manakah letak Q_1?

Untuk median, 20 dibagi 2 = 10, maka median terletak di antara data urutan ke-10 dan ke-11.

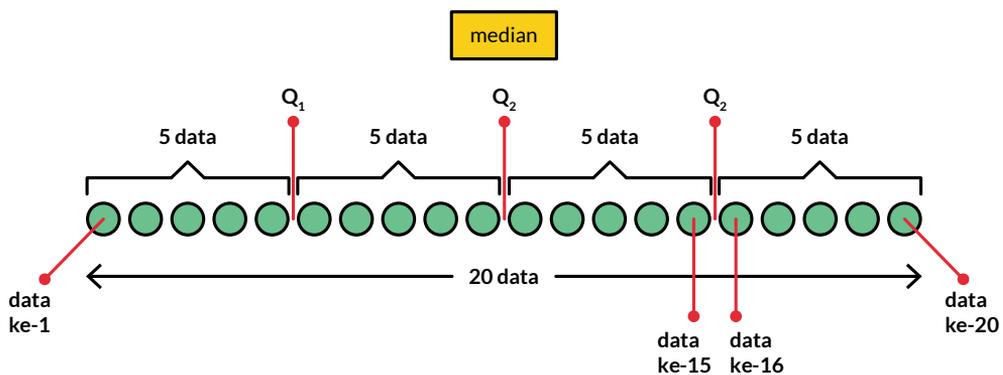
Untuk Q_1, 20 dibagi 4 = 5, maka Q_1 terletak di antara data urutan ke-5 dan ke-6.

Agar lebih jelas, kalian dapat melihat ilustrasi berikut.

Gambar 7.11 Letak Q_1 dan Q_2 dalam Kelompok Data $n = 20$

Dari ilustrasi di atas, kalian bisa melihat bahwa Median = Q_2, yaitu membagi kumpulan data menjadi 2 sama besar yaitu, 10 data di sebelah kiri dan 10 data di sebelah kanan.

Sedangkan Q_1 membagi dua ke-10 data yang berada di sebelah kiri menjadi masing-masing sebanyak 5 data.

Nah, bisakah kalian mencari di mana letak Q_3 atau kuartil atas agar dia membagi ke-10 data di sebelah kanan Q_2 sama banyak?

Benar sekali, Q_3 terletak di antara data ke-15 dan ke-16.

Gambar 7.12 Letak Kuartil dalam Kelompok Data $n = 20$

Dari ilustrasi di atas, kalian dapat melihat bahwa Q_1, Q_2 dan Q_3 membagi kumpulan data menjadi 4 bagian yang sama besar, yaitu masing-masing terdiri dari 5 data.

Atau dapat dikatakan bahwa di antara Q_1 dan Q_2 terdapat 25% data. Demikian juga di antara Q_2 dan Q_3 terdapat 25% data.

Bisakah kalian menentukan rumus untuk mencari Q_3? Coba pikirkan dulu sejenak.

Serupa dengan mencari letak median, maka untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_1, bagilah banyaknya data dengan 4.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m, maka Q_1 terletak di tengah-tengah antara urutan ke-m dan ke-$(m + 1)$.
- Tapi jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_2 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Misalkan jika banyaknya data ada sebanyak 20 buah, di manakah letak median? Di manakah letak Q_1?

Benar, serupa dengan mencari letak median dan Q_1, maka untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_3 adalah dengan mengalikan banyaknya data dengan $\frac{3}{4}$.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat m, maka Q_3 terletak di tengah-tengah antara urutan ke-m dan ke-$(m + 1)$.
- Tapi jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_3 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Jika banyaknya data ada 20 buah, maka $\frac{3}{4} \times 20 = 15$. Karena 15 merupakan bilangan bulat, maka letak Q_3 ada di antara data ke-15 dan ke-16.

Bandingkan hasilnya dengan ilustrasi di atas. Apakah sama atau berbeda?

Carilah Q_1, Q_2 dan Q_3 dari data penjualan sepatu pada Tabel 7.6.

2. Kuartil Data Kelompok

Sama seperti menentukan median (Q_2) dalam data kelompok, menentukan Q_1 dan Q_3 juga menggunakan cara yang sama, yaitu dengan cara interpolasi.

Dalam data kelompok, letak Q_1, Q_2 dan Q_3 adalah sebagai berikut:

Kelompok data ditampilkan dalam tabel frekuensi kumulatif, lalu letak kuartil adalah sebagai berikut:

- Q_1 = data ke $\frac{1}{4}$ dari total data
- Q_2 = data ke $\frac{1}{2}$ dari total data
- Q_3 = data ke $\frac{1}{4}$ dari total data

Mari kita gunakan contoh penjualan sepatu di toko A pada Tabel 7.5.

Karena total data ada sebanyak 30 buah, maka letak Q_1 ada di data ke $\frac{1}{4} \times 30 = 7{,}5$

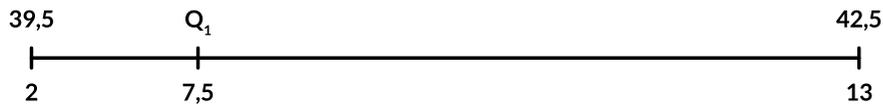
Pada tabel, data ke 7,5 terletak pada kelas 40-42. Masihkah kalian ingat metode interpolasi?

Tepi bawah kelas 40-42 adalah 39,5 dan tepi atas kelas 40-42 adalah 42,5.

Banyaknya data yang berada sebelum 39,5 ada sebanyak 2 buah.

Banyaknya data yang berada sebelum 42,5 ada sebanyak 13 buah.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut.

39,5	Q_1	42,5
2	7,5	13

$$\frac{Q_1 - 39,5}{7,5 - 2} = \frac{42,5 - 39,5}{13 - 2}$$

$$\frac{Q_1 - 39,5}{5,5} = \frac{3}{11}$$

$$Q_1 - 39,5 = \frac{3}{11} \times 5,5$$

$$Q_1 - 39,5 = 1,5$$

$$Q_1 = 41$$

$Q_1 = 41$, artinya 25% dari sepatu yang terjual memiliki ukuran lebih kecil sama dengan 41, atau ukuran 38, 39, 40, dan 41.

Sebanyak 75% sepatu yang terjual merupakan sepatu dengan ukuran di atas 41.

Carilah Q_3 dari data berkelompok penjualan sepatu di toko A pada Tabel 7.5. Bandingkanlah hasil Q_1 dan Q_3 dari data berkelompok dengan Q_1 dan Q_3 dari data tunggal. Jelaskan!

Jadi, saat menghitung kuartil, pastikan terlebih dahulu apakah data yang kalian akan hitung adalah data tunggal atau data kelompok agar metode yang dipilih lebih tepat.

3. Persentil Data Kelompok

Sebelumnya kalian telah mempelajari bahwa kuartil membagi data menjadi 4 bagian sama besar. Ukuran penempatan yang lain adalah persentil. Hanya saja persentil membagi data menjadi 100 bagian sama besar. Persentil ke-10 ditulis dengan simbol P_{10} artinya sebelum P_{10} terdapat 10% data dan sesudah P_{10} terdapat 90% data.

Cara menentukan persentil dalam data kelompok, sama dengan cara menentukan kuartil dalam data kelompok. yaitu dengan cara interpolasi.

Kelompok data ditampilkan dalam tabel frekuensi kumulatif, lalu letak persentil adalah sebagai berikut:

- P_{10} = data ke $\frac{10}{100}$ dari total data
- P_{85} = data ke $\frac{85}{100}$ dari total data

Eksplorasi 7.7

Ayo Bereksplorasi

Mari kita lihat data berikut. Data berikut menampilkan lamanya waktu yang diperlukan ketika seseorang mengurus KTP di kelurahan M selama 1 minggu.

Waktu yang diperlukan, *t* (menit)	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
Frekuensi	6	10	18	13	2

a. Hitunglah P_{65}.

Ayo Berpikir Kritis

Ketika kita melihat pengumuman atau klaim dari seseorang atau siapa pun, ada baiknya kita mempertanyakan dasar dari klaim atau pengumuman tersebut, tidak begitu saja menerimanya tanpa data pendukung. Kehati-hatian ini menjadi bekal yang sangat penting saat menghadapi berbagai masalah.

b. Di papan pengumuman kantor kelurahan tertulis poster sebagai berikut:

Untuk pengurusan KTP
Hanya 10% dari warga yang perlu menunggu lebih dari 56 menit

Dengan menghitung persentil yang sesuai, berikan komentarmu tentang benar atau tidaknya isi dari poster tersebut.

Solusi

a. Karena data di atas merupakan data kelompok, maka kita akan menggunakan interpolasi untuk menemukan persentil ke-65.

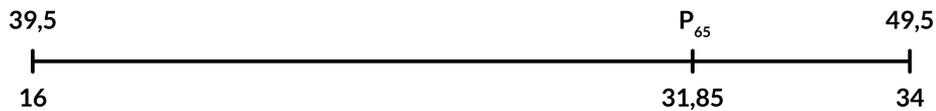
Pertama kita tentukan dulu letak P_{65}. Total frekuensi ada sebanyak 49 buah.

- P_{65} terletak pada data ke $\frac{65}{100} \times 49 = 31{,}85$
- Jadi P_{65} ada di kelas dengan interval 40–49.

Tepi bawah kelas 40–49 adalah 39,5 dan tepi atas kelas 40–49 adalah 49,5.

Banyaknya data sebelum 39,5 ada sebanyak 16 data.

Banyaknya data sebelum 49,5 ada sebanyak 34 data.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut:

Lalu kita gunakan interpolasi:

$$\frac{P_{65} - 39,5}{31,85 - 16} = \frac{49,5 - 39,5}{34 - 16}$$
$$\frac{P_{65} - 39,5}{15,85} = \frac{10}{18}$$
$$P_{65} - 39,5 = \frac{5}{9} \times 15,85$$
$$P_{65} - 39,5 = 8,81$$
$$P_{65} = 48,31$$

P_{65} = 48,31 artinya 65% warga menunggu kurang dari 48,31 menit atau 35% warga menunggu lebih dari 46,31 menit.

b. Untuk menentukan apakah isi poster tersebut benar atau tidak, maka kalian perlu mencari Persentil ke-90.

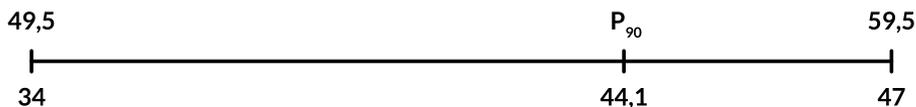
Pertama kita tentukan dulu letak P_{90}.

- P_{90} terletak pada data ke $\frac{90}{100} \times 49 = 44{,}1$
- Data ke-44,1 terletak pada kelas 50–59
- Jadi P_{90} ada di kelas 50–59.

Kelas 50–59 memiliki tepi bawah = 49,5 dan tepi atas = 59,5.

Banyaknya data sebelum 49,5 ada sebanyak 34 data.

Banyaknya data sebelum 59,5 ada sebanyak 47 data.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut:

Lalu, kita kembali menggunakan interpolasi:

$$\frac{P_{90} - 49,5}{44,1 - 34} = \frac{59,5 - 49,5}{47 - 34}$$

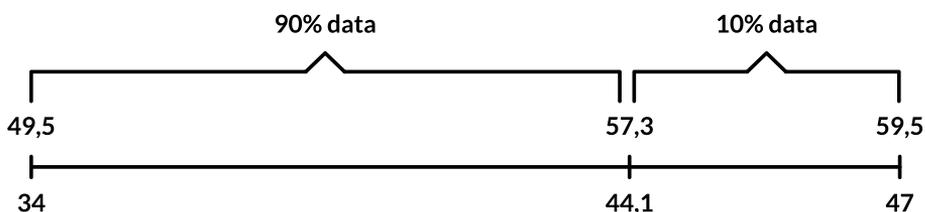
$$\frac{P_{90} - 49,5}{10,1} = \frac{10}{13}$$

$$P_{90} - 49,5 = \frac{10}{13} \times 10,1$$

$$P_{90} - 49,5 = 7,8$$

$$P_{90} = 49,5 + 7,8$$

$$P_{90} = 57,3$$

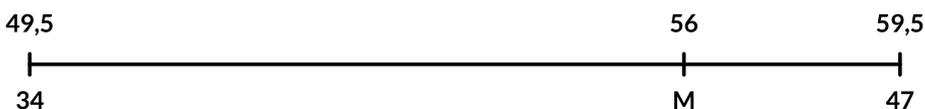
Interpretasi dari hasil P_{90} = 57,3 artinya 90% warga menunggu pengurusan KTP sampai 57,3 menit dan ada 10% warga yang menunggu lebih dari 57,3 menit. Jadi isi poster yang menyebutkan bahwa hanya 10% warga yang menunggu lebih dari 56 menit tidak tepat. Karena pasti lebih dari 10% warga yang menunggu lebih dari 56 menit.

Alternatif lain, kalian bisa mencari banyaknya warga yang menunggu lebih dari 56 menit.

Data 56 menit berada di kelas 50–59.

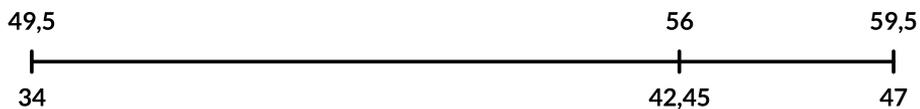
Tepi bawah dan tepi atas kelas 50–59 adalah 49,5 dan 59,5.

Banyaknya data sebelum 49,5 ada sebanyak 34 data.

Banyaknya data sebelum 59,5 ada sebanyak 47 data.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut:

Sama seperti sebelumnya, kita kembali menggunakan metode interpolasi:

$$\begin{aligned}
\frac{56 - 49,5}{\text{M} - 34} &= \frac{59,5 - 49,5}{47 - 34} \\
\frac{6,5}{\text{M} - 34} &= \frac{10}{13} \\
(13)(6,5) &= 10(\text{M} - 34) \\
84,5 &= 10(\text{M} - 34) \\
\text{M} - 34 &= 8,45 \\
\text{M} &= 34 + 8,45 \\
\text{M} &= 42,45
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan hasil di atas kita coba interpretasikan hasilnya.

Total data = 49.

42,45 warga menunggu pengurusan KTP kurang dari 56 menit.

Banyaknya warga menunggu pengurusan KTP lebih dari 56 menit =

$$49 - 42,45 = 6,55$$

Persentase warga yang menunggu lebih dari 56 menit =

$$\frac{6,55}{49} \times 100\% = 13,4\%$$

Jadi, klaim kantor kelurahan bahwa hanya 10% warga yang menunggu lebih dari 56 menit tidak benar.

Latihan 7.4

1. Secara geografis Indonesia dilalui oleh garis khatulistiwa sehingga hanya terdapat 2 musim, yaitu musim panas dan musim hujan. Oleh karena itu, sangat penting bagi kita untuk memahami faktor penting apa saja yang ada pada kedua musim tersebut agar kita dapat mempersiapkan diri dengan lebih baik dalam usaha hidup berdamai dengan alam. Salah satu faktor yang penting yang menentukan musim adalah faktor curah hujan.

   Curah hujan adalah jumlah air hujan yang turun pada suatu daerah dalam kurun waktu tertentu. Dengan kata lain, curah hujan adalah volume air hujan yang terkumpul dalam bidang datar dalam periode tertentu.

Biasanya curah hujan dinyatakan dalam satuan milimeter. Data curah hujan yang ditampilkan adalah ketinggian air hujan yang terkumpul di tempat datar seluas 1 meter persegi. Jadi, jika curah hujan sebesar 1 mm artinya volume air hujan yang terkumpul pada tempat datar seluas 1 meter persegi ada sebanyak 1 liter. Pada umumnya curah hujan dikategorikan menjadi 3 kategori, yaitu rendah (0-100 mm), menengah (100-300 mm) dan tinggi (300-500 mm).

Perhatikan data curah hujan di Kota Samarinda sepanjang tahun 2017 berikut (dalam mm, dibulatkan ke satuan terdekat):

161 139 88 343 309 421 161 250 100 152 219 223

Sumber: https://samarindakota.bps.go.id

a. Tentukanlah median dari data tersebut.

b. Tentukanlah Q_1 dan Q_3 dari data tersebut. Apakah kalian perlu melakukan interpolasi?

2. Menjelang Hari Raya Kurban, biasanya para peternak sapi mempersiapkan sapi-sapi yang akan dijual. Berikut data berat 31 ekor sapi yang akan dijual oleh peternak.

Berat sapi (kg)	300-349	350-399	400-449	450-499	500-549
Frekuensi	3	6	10	7	5

a. Tentukanlah estimasi dari median berat sapi di atas.

b. Carilah Q_1. Apakah kalian perlu melakukan interpolasi?

c. Carilah Q_3.

d. Interpretasikanlah hasil Q_3 yang kamu dapatkan di bagian c.

e. Carilah P_{10}, lalu interpretasikan hasilnya.

3. Indonesia adalah negara yang kaya dan terkenal dengan faunanya yang beraneka ragam. Bahkan, banyak hewan yang hanya terdapat di Indonesia karena keunikan kondisi alamnya. Karena itulah kita harus melestarikan dan memperhatikan hewan langka yang masih tersisa agar kelak generasi selanjutnya tetap dapat menyaksikan kelangsungan hidup hewan langka ini. Salah satu contoh hewan langka adalah burung elang jawa (*Nisaetus bartelsi*). Jumlahnya saat ini diperkirakan hanya tinggal sekitar 300-500 ekor saja.

Tabel di bawah ini menunjukkan panjang bentang sayap elang jawa dalam meter yang berhasil dikumpulkan oleh para peneliti lingkungan.

Panjang bentang sayap (cm)	166–170	171–175	176–180	181–185	Lebih dari 186
Frekuensi	4	20	37	28	11

a. Tentukanlah Q_1 dan Q_3.

b. Tentukanlah persentil ke-80 dan interpretasikanlah hasilnya.

c. Jelaskan mengapa tidak mungkin bisa menemukan persentil ke-90.

Ayo Berefleksi

Dalam subbab ini, kalian sudah belajar mengenai ukuran lokasi: kuartil dan persentil.

a. Kuartil berapakah yang sama dengan median?

b. Ada berapa persen datakah yang di atas Q_3?

c. Ada berapa persen datakah yang di atas Q_1?

d. Ada berapa persen datakah yang di bawah P_{15}?

e. Kuartil berapakah yang nilainya sama dengan P_{25}? $P7_5$?

E. Ukuran Penyebaran

1. Jangkauan Inter Kuartil

Ukuran penyebaran dari sekumpulan data mengukur seberapa jauh data-data tersebut tersebar. Dua kelompok data yang memiliki *mean* yang sama, bisa memiliki uluran penyebaran yang sangat berbeda.

Eksplorasi 7.8 Membandingkan Ukuran Penyebaran dari Dua Kelompok Data Tunggal

Ayo Bereksplorasi

Kelompok pertama yang terdiri dari 12 orang memiliki umur: 13, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18

Kelompok kedua yang juga terdiri dari 12 orang memiliki umur: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 27, 28, 29, 32, 36

Hitunglah *mean*, Q_1, dan Q_3 dari kedua kelompok di atas.

Rata-rata umur dari kelompok pertama maupun kelompok kedua adalah 16 tahun.

Walaupun kedua kelompok memiliki *mean* yang sama, namun jika kalian memperhatikan setiap data dari kedua kelompok, manakah yang menurut kalian lebih mewakili kelompok umur siswa? Manakah yang lebih mewakili umur orang dewasa dan anak kecil? Jelaskan alasanmu.

Salah satu ukuran penyebaran yang telah kalian pelajari sebelumnya adalah jangkauan (*range*).

Range kelompok pertama = 18 – 13 = 5

Range kelompok kedua = 36 – 1 = 35

Range kelompok kedua lebih besar dari *range* kelompok pertama, berarti data pada kelompok kedua jauh lebih tersebar dibanding kelompok pertama.

Ukuran penyebaran lain yang dapat digunakan adalah jangkauan interkuartil. Jangkauan interkuartil diperoleh dengan cara mencari selisih antara kuartil atas (Q_3) dan kuartil bawah (Q_1).

Menghitung Q_1 dan Q_3 kelompok pertama, tidak perlu menggunakan metode interpolasi karena data merupakan data tunggal.

Karena $\frac{1}{4}$ data = $\frac{1}{4} \times 12 = 3$, maka Q_1 terletak di antara data ke-3 dan ke-4

Sedangkan $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, maka Q_3 terletak di antara data ke-9 dan ke-10

Kelompok pertama: $Q_1 = 15$ dan $Q_3 = 17$

Kelompok kedua: $Q_1 = 4{,}5$ dan $Q_3 = 28{,}5$

Jangkauan interkuartil kelompok pertama = 17–15 = 2, sedangkan jangkauan interkuartil kelompok kedua = 28,5 – 4,5 = 24.

Jika hasil di atas kita tampilkan dalam tabel:

Tabel 7.8 Perbandingan Mean, Range dan Jangkauan Interkuartil Antara Kelompok Pertama dan Kedua

Kelompok	*Mean*	*Range*	Jangkauan Interkuartil
Pertama	16	5	2
Kedua	16	35	24

Maka kita dapat menyimpulkan bahwa walaupun kedua kelompok memiliki rata-rata umur yang sama yaitu 16, kalian akan dapat menemukan teman-teman yang seumuran dengan kalian pada kelompok pertama daripada kelompok kedua. Hal ini dikarenakan data-data yang tersebar pada kelompok pertama memiliki ukuran penyebaran (*range* dan jangkauan interkuartil) yang lebih kecil dibanding kelompok kedua. Jadi, data pada kelompok pertama banyak yang besarnya di sekitar *mean*.

2. Varian dan Simpangan Baku Data Tunggal

Ukuran penyebaran lainnya yang biasa digunakan untuk mengetahui sebaran data adalah varian.

Semakin kecil varian, maka data-data dalam kelompok tersebut semakin seragam mendekati *mean* kelompok. Demikian juga sebaliknya.

Varian diperoleh dengan cara mengurangi setiap data dengan *mean*, atau dengan rumus berikut:

Varian = $\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$, di mana $\bar{x}$ adalah *mean*.

Varian sering diberikan ditulis dalam simbol σ^2.

Sedangkan simpangan baku adalah akar dari varian. Simbol untuk simpangan baku adalah σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$$

Eksplorasi 7.9 Membandingkan Varian dari Dua Kelompok Data Tunggal

Kembali ke soal kelompok umur:

Kelompok pertama yang terdiri dari 12 orang memiliki umur: 13, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18.

Kelompok kedua yang juga terdiri dari 12 orang memiliki umur: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 27, 28, 29, 32, 36.

Hitunglah varian dan simpangan baku dari kedua kelompok umur ini.

Rata-rata dari kelompok pertama maupun kedua = 16. Selanjutnya, mari kita hitung varian masing-masing kelompok.

$$\sigma^2 \text{ Kelompok 1} = \frac{(13-16)^2+(14-16)^2+2(15-16)^2+2(16-16)^2+5(17-16)^2+(18-16)^2}{12}$$

$$= \frac{9+4+2+0+5+4}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

σ^2 Kelompok 2

$$= \frac{(1-16)^2+(3-16)^2+(4-16)^2+(5-16)^2+(7-16)^2+(8-16)^2+(12-16)^2+(27-16)^2+(28-16)^2+(29-16)^2+(32-16)^2+(36-16)^2}{12}$$

$$= \frac{225+169+144+121+81+64+16+121+144+169+256+400}{12} = \frac{1910}{12} = 159,2$$

Simpangan baku (σ) kelompok 1 = σ^1 = $\sqrt{2} = 1,41$

Simpangan baku (σ) kelompok 2 = σ^2 = $\sqrt{159,2} = 12,62$

Kita dapat melihat bahwa nilai σ^2 yang besar menunjukkan bahwa data-data umur pada kelompok 2 memiliki sebaran yang jauh dari *mean* kelompok 2. Sedangkan kelompok 1 memiliki data-data yang relatif seragam dan mendekati *mean* kelompok 1.

Cara lain dalam menghitung varian:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

Mari kita menghitung ulang nilai dari varian kelompok 1 dengan rumus di atas dan membandingkan hasilnya dengan cara sebelumnya:

$$\Sigma x = 13+14+15+15+16+16+17+17+17+17+17+18 = 192$$
$$\Sigma x^2 = 13^2+14^2+15^2+15^2+16^2+16^2+17^2+17^2+17^2+17^2+17^2+18^2 = 3096$$

Karena jumlah data ada sebanyak 12, maka n = 12

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{3096}{12} - \left(\frac{192}{12}\right)^2 = 2$$

Ayo Berdiskusi

Mengapa rumus kedua bisa memberikan hasil yang sama?

Bagaimana hasil varian dengan cara ini dibanding cara sebelumnya? Apakah sama?

1. Kalian dapat mencoba untuk mencari varian dengan rumus $\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$ untuk kelompok yang kedua.

2. Jika ada kelompok ketiga yang juga beranggotakan 12 orang, namun semuanya berusia 16 tahun, tanpa melakukan perhitungan menggunakan rumus, bisakah kalian menentukan mean, varian, dan simpangan baku dari kelompok ketiga ini?

3. Varian dan Simpangan Baku Data Kelompok

Sama halnya seperti mencari mean dari data kelompok, kita akan selalu mengasumsikan bahwa data-data yang terdapat dalam kelas interval tertentu diasumsikan tersebar merata sehingga kita dapat menggunakan nilai tengah dari setiap kelas interval. Mari kita lihat soal berikut.

Eksplorasi 7.10 Varian dalam Data Kelompok

Dari suatu penelitian mengenai lamanya baterai HP, diperoleh data sebagai berikut:

Tabel 7.9 Tabel Distribusi Frekuensi Data Kelompok Durasi Baterai HP

Durasi baterai (jam)	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30
Frekuensi	2	10	18	45	5

Tentukanlah varian dan simpangan dari durasi baterai tersebut.

Untuk data berkelompok, maka kita perlu menentukan nilai tengah dari masing-masing kelas terlebih dahulu. Lalu mencari nilai Σx dan Σx^2. Agar lebih mudah, kita tempatkan semua nilai dalam tabel berikut.

Durasi baterai (jam)	Nilai tengah, x_i	Frekuensi, f	$f \cdot x_i$	$f \cdot x_i^2$
6-10	8	2	16	128
11-15	13	10	130	1.690
16-20	18	18	324	5.832
21-25	23	45	1.035	23.805
26-30	28	5	140	3.920
		80	1.645	35.375

Dari tabel di atas kita memperoleh:

$$\Sigma f = 80 \qquad \Sigma(fx) = 1.645 \qquad \Sigma(fx^2) = 35.375$$

Maka varian $\sigma^2 = \frac{\Sigma(fx^2)}{\Sigma(f)} - \left(\frac{\Sigma(fx)}{\Sigma(f)}\right)^2 = \frac{35375}{80} - \left(\frac{1645}{80}\right)^2 = 19,37$

Simpangan baku $\sigma = \sqrt{19,37} = 4,4$

Latihan 7.5

1. Dari suatu survei tentang banyaknya buku yang dibaca oleh siswa SMA dalam 1 bulan, diperoleh hasil yang diambil secara acak. Banyaknya buku yang dibaca 7 orang siswa adalah sebagai berikut:

   3 4 6 2 8 8 5

   Tentukanlah varian dan simpangan dari data tersebut.

2. Sebelum pandemi Covid-19, sekolah mencatat waktu yang diperlukan oleh siswa untuk makan siang di kantin (dibulatkan ke menit terdekat). Hasilnya adalah sebagai berikut:

Waktu yang diperlukan, *t* (menit)	35	36	37	38
Frekuensi	3	17	29	34

   a. Tentukanlah rata-rata dari data tersebut.

   b. Tentukanlah simpangan bakunya.

3. Diketahui sekumpulan data memiliki data-data sebagai berikut:

$$\Sigma x = 24 \qquad \Sigma x^2 = 78 \qquad n = 8$$

   Carilah:

   a. *mean*

   b. Varian, σ^2

   c. Simpangan baku, σ

4. Dari data kelompok pertama yang terdiri dari 10 bilangan diperoleh sebagai berikut:

$$\Sigma x = 50 \qquad \Sigma x^2 = 310$$

   Sedangkan kelompok kedua yang terdiri dari 15 bilangan diperoleh sebagai berikut:

$$\Sigma x = 86 \qquad \Sigma x^2 = 568$$

Tentukanlah *mean* dan simpangan baku dari gabungan kedua kelompok tersebut yang terdiri dari 25 bilangan.

5. Guru berbeda mengajar 2 kelas yang berbeda, kelas A dan kelas B, dengan beda metode mengajar. Siswa dari kedua kelas tersebut mengikuti ujian yang sama pada akhir semester. Berikut hasil ujian dari kedua kelas.

Hasil Ujian	***20-29***	***30-39***	**40-49**	***50-59***	***60-69***	**70-79**	***80-89***
Frekuensi A	1	3	6	6	11	10	8
Frekuensi B	1	2	4	13	15	6	3

a. Hitunglah *mean* dari masing-masing kelompok.

b. Dari hasil a, menurut kalian, apakah metode guru yang satu lebih baik dari metode guru lainnya? Jelaskan alasan dari jawabanmu!

Refleksi

Dalam bab ini, kalian sudah belajar mengenai ukuran pemusatan, ukuran lokasi, dan ukuran penyebaran dari suatu kelompok data dan menggunakan berbagai ukuran tersebut dalam melakukan pengambilan keputusan.

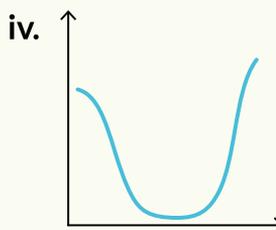
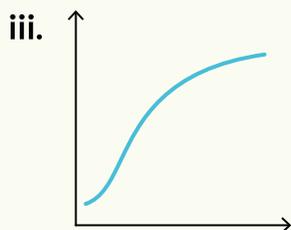
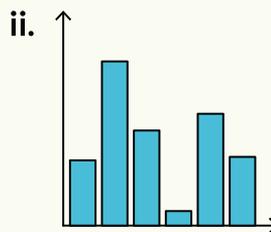
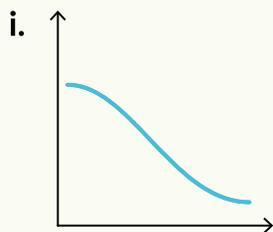
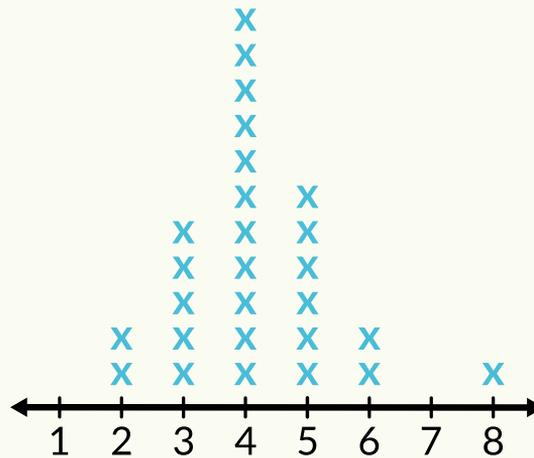
a. Bagaimana menemukan *mean*, modus, dan median data kelompok?

b. Bagaimana menemukan ukuran lokasi seperti persentil dan kuartil baik dalam data tunggal maupun dalam data kelompok?

c. Bagaimana menemukan varian dan simpangan baku baik dalam data tunggal maupun dalam data kelompok?

Bagaimana memilih ukuran pemusatan yang tepat dan sesuai dengan konteks masalah?

Uji Kompetensi

1. Di antara keempat grafik di bawah ini, manakah yang merupakan grafik dari:
   a. Perubahan berat badan seekor kucing dari lahir sampai usia 2 tahun.
   b. Aktivitas kegiatan anak dari sebelum tidur dan setelah tidur.
   c. Jumlah penduduk di 6 kota yang berbeda.
   d. Ketinggian permukaan air laut dari kondisi pasang ke kondisi surut.

2. Saat pelajaran matematika, para siswa di kelas 10 menggambar *line plot* yang menunjukkan banyaknya anggota keluarga dari setiap siswa.

   a. Berapakah banyaknya orang yang terdapat dalam keluarga para siswa di kelas tersebut?

   b. Seorang siswa yang bernama Jono berkata, "*Line plot* ini salah! Anggota keluarga saya berjumlah 8 orang. Saya memiliki jumlah anggota keluarga yang terbanyak, mengapa tanda X di atas angka 8 malah jadi yang paling pendek?" Jawablah pertanyaan Jono.

3. Hasil 4 ulangan matematika Dodi adalah 81, 79, 90, dan 70. Ulangan ke-5 baru akan dibagikan. Guru Dodi menyampaikan ke Dodi bahwa Dodi boleh memilih apakah mau menggunakan median atau *mean* sebagai nilai rapornya, namun Dodi harus menentukan sebelum ia menerima hasil tes matematika yang ke-5.

   a. Hitunglah *mean* dan median dari keempat hasil ulangan matematika Dodi.

   b. Jika Dodi tidak yakin dengan hasil ulangan ke-5 nya, manakah yang sebaiknya ia pilih, *mean* atau median? Jelaskan.

   c. Jika Dodi yakin dengan hasil ulangan ke-5 nya, manakah yang sebaiknya ia pilih, *mean* atau median? Jelaskan.

4. Dalam ujian Fisika, rata-rata nilai dari delapan siswa adalah 65. Rata-rata grup kedua yang berjumlah 12 siswa adalah 72. Hitunglah rata-rata gabungan dari kedua kelompok ini yang berjumlah 20 siswa.

5. Selama tahun ajaran yang lalu, diperoleh data banyaknya hari di mana siswa tidak hadir.

Jumlah hari absen	0	1	2	3	4
Frekuensi	12	20	10	7	5

   a. Hitunglah Q_1 dari data ini, lalu interpretasikan hasilnya
   b. Hitunglah jangkauan interkuartil dari data ini.
   c. Hitunglah standar deviasi dari data jumlah hari absen tersebut.

6. Dalam suatu lomba lari, diperoleh data catatan waktu sebagai berikut:

Waktu yang ditempuh, *t* (menit)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Frekuensi	5	10	36	20	9

   a. Hitunglah *mean*.
   b. Gunakanlah interpolasi untuk menghitung jangkauan interkuartil.
   c. Jika diketahui $\Sigma fx = 3.740$ dan $\Sigma fx^2 = 183.040$ di mana x adalah nilai tengah dari tiap kelas, maka tentukanlah nilai dari varian dan simpangan baku dari catatan waktu para pelari.

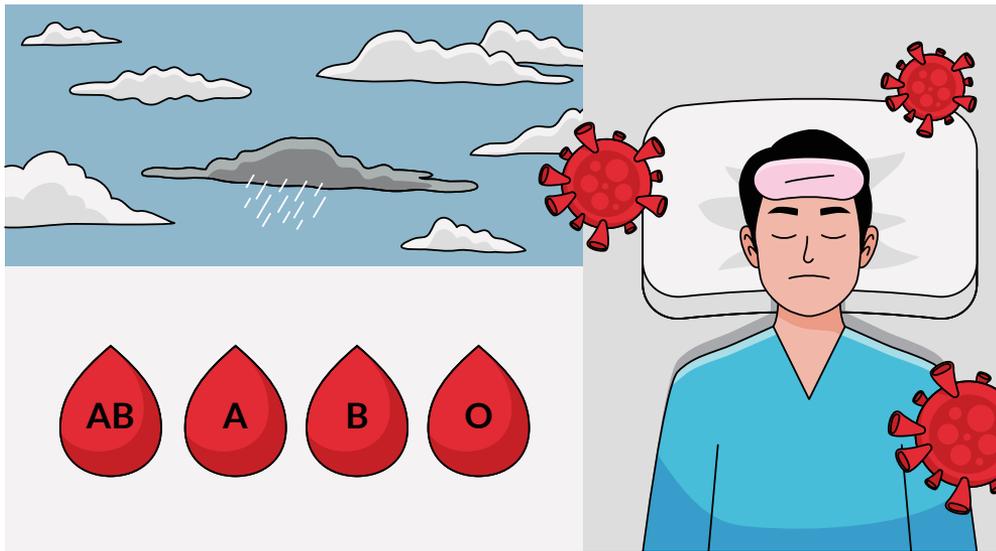
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021
Matematika untuk SMA/SMK Kelas X
Penulis: Dicky Susanto, dkk
ISBN: 978-602-244-526-5

Bab 8

Peluang

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Menentukan ruang sampel sebuah kejadian;
2. Membuat distribusi peluang kejadian;
3. Membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas;
4. Menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas; dan
5. Memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.

Seberapa besar kemungkinan akan turunnya hujan? Berapa persen kemungkinan seseorang terpapar Covid-19? Berapa persen kemungkinan seseorang memiliki golongan darah AB-? Semua pertanyaan ini berhubungan dengan kemungkinan suatu kejadian yang merupakan bagian dari kehidupan kita sehari-hari. Kalian bisa memprediksi kemungkinan suatu kejadian dengan menggunakan salah satu bidang matematika yang disebut **peluang**.

Peluang adalah suatu ukuran tentang kemungkinan suatu kejadian (*event*) yang akan terjadi (atau tidak terjadi) di masa mendatang. Dalam bab ini, kalian akan mempelajari mengenai ruang sampel dan distribusi peluang, dan menggunakan aturan penjumlahan untuk menemukan peluang bahwa peristiwa A terjadi atau peristiwa B terjadi.

Pertanyaan Pemantik

1. Bagaimana kalian dapat menentukan peluang dari dua kejadian acak yang terkait seperti melempar dua dadu?
2. Dalam kondisi apa kalian dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?

Kata Kunci

Peluang, ruang sampel, kejadian saling lepas, kejadian tidak saling lepas.

Peta Konsep

Ayo Mengingat Kembali

Peluang Sederhana

- Jika sebuah kejadian tidak mungkin terjadi, maka peluangnya 0.
- Jika sebuah kejadian pasti terjadi, maka peluangnya 1.
- Peluang memiliki nilai antara 0 dan 1 inklusif (0 dan 1 termasuk).
- Peluang dituliskan dalam bentuk pecahan atau desimal.
- Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dalam suatu percobaan (eksperimen) peluang dan diberikan lambang *S*.
- Banyaknya semua anggota *S* ditulis dengan simbol $n(S)$.
- Titik sampel adalah anggota dari ruang sampel.
- Peluang terjadinya kejadian A adalah $\frac{n(A)}{n(S)}$, di mana $n(A)$ adalah banyaknya anggota dalam kejadian A dan $n(S)$ adalah banyaknya anggota dalam himpunan ruang sampel.

A. Distribusi Peluang

Gambar 8.1 Berbagai Permainan Papan (*Board Game*)

Dalam mendesain permainan, perlu dipastikan bahwa peluang untuk menang sama besarnya untuk setiap pemain. Sering kali permainan tersebut menggunakan dadu untuk menentukan jumlah langkah. Dadu memiliki bentuk simetris dan dengan asumsi dadu tersebut adil sehingga setiap sisi memiliki kemungkinan yang sama besarnya saat dadu dilempar.

Eksplorasi 8.1 Distribusi Peluang

Misalnya kalian melempar dua buah dadu yang memiliki warna berbeda, satu merah dan satu putih.

1. Ayo salin dan lengkapi Tabel 8.1 untuk menunjukkan semua kemungkinan hasil melemparkan sekali kedua dadu tersebut.

Tabel 8.1 Ruang Sampel untuk Kejadian Melempar Dadu Merah dan Dadu Putih

Angka pada Dadu Merah \ Angka pada Dadu Putih	1	2	3	4	5	6
1	1, 1					
2						
3		3, 2				
4					4, 5	
5						
6						

Ayo Berdiskusi

Apa arti 3, 2? Apakah berbeda dengan 2, 3? Mengapa?

2. Apakah semua hasil sama kemungkinannya?

Ayo Berpikir Kritis

Jika kedua dadu memiliki warna yang sama, apakah hasil kemungkinan tetap sama? Jelaskan.

3. Apakah peluang mendapatkan angka yang sama pada kedua dadu adalah sama besarnya?
4. Berapa peluang mendapatkan setidaknya satu dadu yang menunjukkan angka 5?

5. Mana yang lebih memungkinkan, mendapatkan setidaknya satu angka 4 atau mendapatkan dua angka yang sama? Jelaskan.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat melakukan pelemparan dadu secara daring di https://virtualdiceroll.com/2/en/two-dice.

Tabel 8.1 pada eksplorasi disebut sebagai ruang sampel untuk situasi melempar dua dadu. Sebuah **ruang sampel** merupakan himpunan semua kemungkinan hasil. Untuk dadu yang adil, semua 36 hasil pada ruang sampel sama kemungkinannya untuk terjadi. **Sama kemungkinan** artinya setiap hasil memiliki peluang yang sama untuk terjadi. Ketika hasil sama kemungkinannya, peluang sebuah kejadian ditentukan oleh

$$P_{\text{kejadian}} = \frac{\text{jumlah kejadian yang diinginkan}}{\text{jumlah hasil yang mungkin}}$$

Contoh:

Peluang jumlah 11 adalah $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Peluang angka 2 di setidaknya satu dadu atau berjumlah 2 adalah $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang angka sama dan berjumlah 8 adalah $\frac{1}{36}$.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang angka sama atau berjumlah 8 adalah $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Peluang jumlah tidak lebih daripada 9 adalah $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Peluang jumlah setidaknya 9 adalah $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Latihan 8.1

1. Coba kalian tentukan peluang untuk kejadian berikut ini:
   a. jumlah 2 atau 3
   b. jumlah lebih besar daripada 3
   c. jumlah setidaknya 3
   d. jumlah lebih kecil daripada 3

Distribusi peluang adalah deskripsi dari semua kemungkinan hasil dari situasi acak bersama dengan peluang terjadinya masing-masing. Distribusi peluang berbeda dari ruang sampel karena semua hasil harus berupa angka tunggal dan peluang harus ditentukan. Misalnya, Tabel 8.2 distribusi peluang di bawah ini menunjukkan semua kemungkinan jumlah yang bisa diperoleh dari lemparan dua dadu.

Tabel 8.2 Distribusi Peluang untuk Jumlah Dua Dadu

Jumlah	Peluang
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Salin dan lengkapi distribusi peluang ini dengan mengisi peluangnya.

a. Berapa jumlah dari semua peluang?

b. Bagaimana kalian dapat menggunakan tabel distribusi peluang untuk mencari peluang pada Latihan 8.1?

Latihan 8.2

1. Misalnya kalian melempar dua dadu dan mencatat angka yang lebih besar daripada dua dadu tersebut. (Jika angkanya sama, catat angka tersebut.)

   a. Gunakan ruang sampel pada Eksplorasi 8.1 untuk membantu kalian melengkapi tabel distribusi peluang untuk situasi ini.

Angka yang Lebih Besar	Peluang
1	
2	
3	
4	

b. Berapa peluang bahwa angka yang lebih besarnya adalah 3? Adalah 2 atau 3? Adalah 3 atau kurang? Adalah lebih dari 3?

2. Sekarang misalnya kalian melempar dua dadu dan mencatat nilai mutlak dari selisih kedua bilangan.
   a. Gunakan ruang sampel pada Eksplorasi 8.1 untuk membantu kalian melengkapi tabel distribusi peluang untuk situasi ini.

Nilai Mutlak dari Selisih Dua Dadu	Peluang
0	

   b. Berapa peluang bahwa nilai mutlak dari selisihnya adalah 3? Adalah 2 atau 3? Adalah setidaknya 2? Adalah tidak lebih dari 2?

Ayo Mencoba

Sekarang kalian mencoba sendiri menentukan distribusi peluang untuk kejadian melempar dua keping uang logam dengan dua kemungkinan hasil {gambar, angka} dengan membuat tabel seperti di bawah ini.

Gambar 8.2 Gambar Uang Logam dengan Dua Sisinya

Tabel 8.3 Distribusi Peluang untuk Jumlah Gambar pada Uang Logam

Jumlah Gambar	Peluang
0	
1	
2	

Ayo Berefleksi

Pada bagian ini, kalian telah belajar bagaimana membuat distribusi peluang dari ruang sampel dari hasil yang sama kemungkinannya.

- Apa perbedaan antara ruang sampel dan distribusi peluang?
- Mengapa hasil dari ruang sampel melempar dua dadu sama kemungkinannya?

Ayo Berpikir Kritis

Seorang teman kalian mengatakan bahwa untuk hasil kali dua dadu, peluang mendapatkan bilangan genap lebih besar daripada peluang mendapatkan bilangan ganjil. Setujukah kalian dengan dia? Jelaskan.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan apa yang dikatakan para siswa. Kalian lebih setuju dengan siapa?

Gambar 8.3 Perbincangan Siswa Mengenai Peluang

B. Aturan Penjumlahan

Eksplorasi 8.2 Aturan Penjumlahan

Pada eksplorasi sebelumnya, kalian membuat distribusi peluang untuk jumlah dari dua dadu. Kalian menemukan bahwa untuk menentukan peluang untuk hasil penjumlahan dua dadu mendapat 3 atau 4, kalian dapat *menjumlahkan* peluang untuk mendapatkan jumlah 3 dengan peluang mendapatkan jumlah 4, yaitu $\frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$. Saat mengerjakan eksplorasi ini, pikirkan jawaban untuk pertanyaan berikut: *Dalam kondisi apa kalian dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?*

Ada siswa yang menggunakan hanya satu moda transportasi ke sekolah, sedangkan ada yang menggunakan beberapa moda transportasi. Ayo, salin dan lengkapi tabel berikut untuk moda transportasi yang digunakan oleh semua siswa di kelas kalian hari ini ke sekolah. (Catatan: Jika menggunakan lebih dari satu, pilih yang jarak terpanjang.)

Pikirkan cara mengumpulkan informasi ini dengan efisien.

Tabel 8.4 Jumlah Siswa Sesuai dengan Moda Transportasi yang Digunakan ke Sekolah pada Hari Ini

Moda transportasi yang digunakan ke sekolah hari ini	Jumlah Siswa
Jalan kaki	
Sepeda	
Motor	
Mobil	
Kendaraan Umum	

Sekarang lengkapi tabel berikut dengan mencatat jumlah siswa di dalam kelas kalian yang dapat menggunakan moda transportasi tersebut (bisa lebih dari satu).

Tabel 8.5 Jumlah Siswa sesuai dengan Moda Transportasi yang Dapat Digunakan ke Sekolah

Moda transportasi yang dapat digunakan ke sekolah	Jumlah siswa
Jalan kaki	
Sepeda	
Motor	
Mobil	
Kendaraan Umum	

Dalam matematika, kata "atau" berarti "salah satu atau kedua-duanya". Maka, kejadian bahwa seorang siswa menggunakan sepeda atau menggunakan motor ke sekolah termasuk semua hasil berikut:

- Siswa tersebut dapat menggunakan sepeda, tetapi tidak dapat menggunakan motor ke sekolah.
- Siswa tersebut dapat menggunakan motor, tetapi tidak dapat menggunakan sepeda ke sekolah.
- Siswa tersebut dapat menggunakan baik sepeda maupun motor ke sekolah.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan pertanyaan-pertanyaan ini dengan pasangan atau teman kelompok dan bersiap untuk mempresentasikan hasilnya.

1. Tentukan manakah dari pertanyaan berikut ini yang dapat kalian jawab dengan hanya menggunakan data dari tabel. Kemudian, jawablah pertanyaan tersebut.
   a. Berapa peluang seorang siswa yang dipilih secara acak dari kelas kalian hari ini menggunakan sepeda atau motor ke sekolah?
   b. Berapa peluang seorang siswa yang dipilih secara acak dari kelas kalian biasanya menggunakan sepeda atau motor ke sekolah?
2. Mengapa pertanyaan lain di nomor 1 tidak dapat dijawab hanya dengan menggunakan informasi pada tabel? Informasi apa yang dibutuhkan untuk menjawab pertanyaan tersebut?

Pada Eksplorasi 8.1, kalian dapat menjawab pertanyaan "atau" dengan menjumlahkan peluang masing-masing. Demikian juga untuk tabel pertama dari Eksplorasi 8.2 di mana masing-masing siswa hanya boleh memilih satu jawaban.

Tidaklah demikian dengan tabel kedua di mana siswa boleh memilih lebih dari satu jawaban. Karakteristik apa dari tabel yang memungkinkan untuk menjumlahkan untuk menjawab sebuah pertanyaan "atau"? Perbedaannya adalah antara kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas.

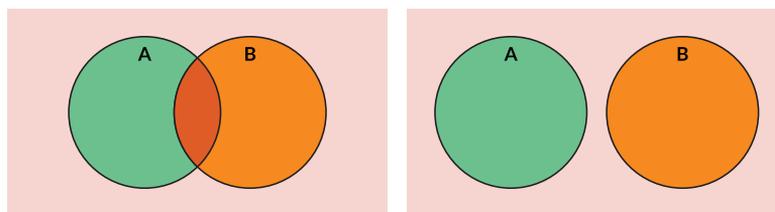
Dua kejadian dikatakan **saling lepas** (atau ***disjoint***) jika tidak mungkin bagi keduanya untuk terjadi pada hasil yang sama. Misalnya, perhatikan kejadian berikut ini. Manakah yang merupakan dua kejadian yang saling lepas dari contoh-contoh berikut ini?

Ayo Berpikir Kritis

Pikirkan pertanyaan ini sendiri kemudian diskusikan dengan pasangan atau anggota kelompok.

a. Melemparkan sepasang dadu dan mendapatkan jumlah 7; mendapatkan angka yang sama pada saat yang sama.
b. Melemparkan sepasang dadu dan mendapatkan jumlah 8; mendapatkan angka yang sama pada saat yang sama.
c. Abi menggunakan mobil ke sekolah hari ini; Abi menggunakan kendaraan umum ke sekolah hari ini.
d. Zain menggunakan motor ke sekolah hari ini; Zain menggunakan sepeda ke sekolah.

1. Dua Kejadian A dan B Saling Lepas

1. Menurut kalian diagram Venn manakah berikut ini yang menggambarkan situasi dua kejadian yang saling lepas?

Gambar 8.4 Diagram Venn untuk Dua Kejadian

2. Untuk dua kejadian A dan B saling lepas, apa peluang bahwa A **dan** B terjadi pada hasil yang sama? Peluang ini ditulis $P(A \text{ dan } B)$ atau $P(A \cap B)$.

Perhatikan diagram Venn, apakah ada daerah yang menggambarkan dua kejadian tersebut sekaligus.

3. Ketika A dan B saling lepas, bagaimana caranya kalian menentukan peluang bahwa A terjadi **atau** B terjadi (atau keduanya terjadi)? Peluang ini ditulis $P(A \text{ atau } B)$ atau $P(A \cap B)P(A \cup B)$.

Secara simbolis kalian dapat menuliskan aturan untuk menghitung peluang bahwa A terjadi **atau** B terjadi dengan $P(A \cup B) = P(A \text{ atau } B)$. Peraturan ini disebut **aturan penjumlahan untuk kejadian saling lepas**.

2. Dua Kejadian A dan B Tidak Saling Lepas

Pada soal 1 di atas, diagram mana yang menggambarkan situasi dua kejadian yang tidak saling lepas?

Untuk dua kejadian A dan B yang tidak saling lepas, apa peluang bahwa A **dan** B terjadi pada hasil yang sama, yaitu $P(A \cap B)$? Di manakah peluang ini dinyatakan pada diagram Venn yang kalian pilih?

Lihat kembali pekerjaan kalian pada Eksplorasi 2. Dengan diagram Venn, jelaskan bagaimana kalian dapat memodifikasi aturan kalian dari soal bagian A untuk dua kejadian saling lepas untuk menghitung $P(A \cup B)$ ketika A dan B tidak saling lepas.

Perhatikan luas daerah peluang kejadian A dan luas daerah peluang kejadian B pada diagram Venn dan bandingkan dengan luas daerah peluang A atau B.

Secara simbolis kalian dapat menuliskan aturan untuk menghitung $P(A \cup B)$ untuk dua kejadian tidak saling lepas dengan $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Aturan ini disebut **aturan penjumlahan**.

Latihan 8.3

Gunakan aturan penjumlahan untuk soal-soal berikut mengenai sepasang dadu yang dilempar.

1. Tentukan peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 5.
   - Apakah kedua kejadian ini saling lepas atau tidak saling lepas?
   - Peluang mendapatkan dua angka sama adalah $P(A) = \frac{?}{36}$.
   - Peluang mendapatkan jumlah 5 adalah $P(A) = \frac{?}{36}$.
   - Peluang mendapatkan dua angka sama **dan** berjumlah 5, $P(A \cap B) = \ldots$
   - Maka peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 5 adalah …
2. Tentukan peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 2.
   - Apakah kedua kejadian ini saling lepas atau tidak saling lepas?
   - Tentukan peluang mendapatkan dua angka sama, peluang mendapatkan jumlah 2, dan peluang mendapatkan dua angka yang sama **dan** berjumlah 2.
3. Tentukan peluang bahwa nilai mutlak dari selisihnya adalah 3 atau mendapatkan jumlah 5.

Hint

Lihat Latihan 8.2 nomor 2.

4. Tentukan peluang bahwa nilai mutlak dari selisihnya adalah 2 atau mendapatkan jumlah 11.

Melalui eksplorasi 8.2, kalian telah belajar bagaimana menghitung peluang untuk terjadinya peristiwa A atau peristiwa B.

Ayo Berefleksi

Apa perbedaan dua kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas berdasarkan aturan penjumlahannya? Mengapa?

Ayo Berpikir Kreatif

Berikan sebuah contoh dua kejadian yang saling lepas yang berbeda dari yang di eksplorasi.

Latihan Mandiri 8.4

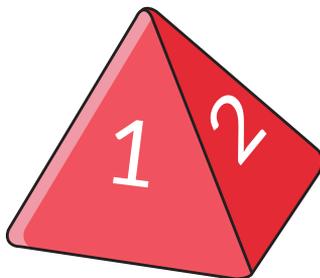
Soal Pemahaman

1. Misalnya kalian melemparkan uang logam tiga kali.
   a. Buatlah daftar ruang sampel untuk semua 8 hasil yang mungkin. Sebagai contoh, salah satu hasil adalah gambar, angka, angka (GAA).
   b. Apakah hasil di dalam ruang sampel kalian sama besar kemungkinan terjadinya? Jelaskan.
   c. Buatlah tabel distribusi peluang untuk jumlah gambar. Apa peluang untuk mendapatkan tepat 2 gambar? Paling banyak 2 gambar?

2. Yang manakah dari pasangan peristiwa berikut ini yang saling lepas? Jelaskan alasannya.
   a. Melempar sepasang dadu: mendapatkan jumlah 6; mendapatkan satu dadu 6.
   b. Melemparkan uang logam 7 kali: mendapatkan tepat 3 gambar; mendapatkan tepat 5 gambar.
   c. Melemparkan uang logam 7 kali: mendapatkan setidaknya 3 gambar; mendapatkan setidaknya 5 gambar.

3. Gunakan bentuk yang sesuai dari aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dari melempar sepasang dadu dan
   a. mendapatkan jumlah 6 atau mendapatkan satu dadu dengan 6,
   b. mendapatkan jumlah 6 atau mendapatkan angka yang sama.

Soal Aplikasi

4. Misalnya kalian melemparkan sebuah dadu dan kemudian melemparkannya kembali. Dadu berbentuk tetrahedron (limas segitiga) beraturan dan terdapat angka 1, 2, 3, dan 4 pada sisinya.

Gambar 8.5 Dadu Berbentuk Limas Segitiga

a. Buatlah bagan yang menunjukkan ruang sampel dari semua kemungkinan hasilnya.
b. Ada berapa hasil kemungkinan? Apakah semua sama besar kemungkinannya?
c. Buatlah tabel distribusi peluang untuk selisih dari kedua dadu (dadu pertama-dadu kedua). [Keterangan: Bukan nilai mutlak dari selisih]
d. Selisih apa yang paling mungkin kalian dapatkan?
e. Berapa peluang bahwa selisihnya paling besar 2?

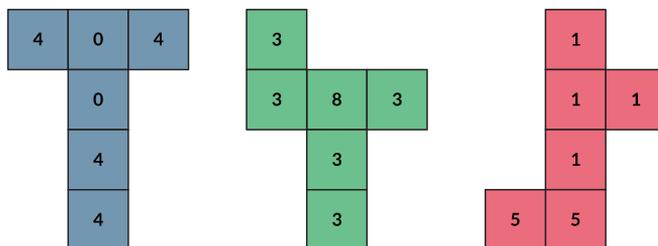
5. Misalnya kalian melemparkan dadu berbentuk tetrahedron (limas segitiga beraturan) dan sebuah dadu biasa (berbentuk kubus dengan enam sisi) pada saat yang sama.
    a. Buatlah bagan yang menunjukkan ruang sampel dari semua hasil yang mungkin.
    b. Berapa banyak hasil yang mungkin? Apakah semuanya sama besar kemungkinannya?
    c. Buatlah tabel untuk distribusi peluang dari jumlah kedua dadu.
    d. Jumlah apa yang paling mungkin didapat?
    e. Berapa peluang bahwa jumlahnya paling banyak 3?

6. Gunakan hasil kerja kalian pada soal 4 dan bentuk yang sesuai dari aturan penjumlahan untuk menjawab pertanyaan berikut yang berhubungan dengan melempar dua dadu tetrahedron.
    a. Berapa peluang kalian mendapatkan perbedaan 3 atau mendapatkan 2 pada dadu pertama?
    b. Berapa peluang mendapatkan selisih 2 atau mendapatkan angka yang sama?
    c. Berapa peluang mendapatkan selisih 0 atau mendapatkan angka yang sama?
    d. Berapa peluang mendapatkan selisih 0 atau jumlah 6?

Soal Penalaran

7. Untuk kasus dua dadu dilempar dua kali, pertimbangkan peluang mendapatkan dua angka yang sama pada lemparan pertama atau pada lemparan kedua.
   a. Apakah benar bahwa peluang mendapatkan dua angka yang sama pada lemparan pertama atau pada lemparan kedua adalah ? Berikan penjelasan untuk jawaban kalian.
   b. Apakah benar bahwa peluang mendapatkan dua angka yang sama pada setidaknya satu dari enam giliran adalah?

8. Misalnya kalian melemparkan uang logam empat kali dan mencatat gambar (G) atau angka (A) sesuai urutan munculnya.
   a. Buatlah daftar semua 16 hasil yang mungkin.
   b. Apakah hasil ini sama besar kemungkinannya?
   c. Buatlah tabel distribusi peluang untuk jumlah gambar.
   d. Berapa peluang yang kalian dapatkan tepat 2 gambar? Paling banyak 2 gambar?

9. Perhatikan dadu khusus yang ditunjukkan sisi-sisinya sebagai berikut. Misalnya dalam sebuah permainan kalian memilih salah satu dadu, dan teman kalian memilih satu dari sisanya. Masing-masing melemparkan dadunya. Yang mendapatkan angka yang lebih besar memenangkan permainan.

Gambar 8.6 Jaring-Jaring Berbagai Dadu

Misalnya teman kalian memilih dadu biru. Supaya kesempatan menang lebih besar, dadu mana yang kalian akan pilih? Jika teman kalian memilih dadu hijau, dadu mana yang kalian akan pilih? Jika teman kalian memilih dadu merah, dadu mana yang kalian akan pilih? Apa kejutan di sini?

10. Pikirkan tiga kejadian *A*, *B* dan *C*.
    a. Gambarlah diagram Venn yang menyatakan situasi di mana A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, dan B dan C adalah saling lepas.
    b. Gambarlah diagram Venn yang menyatakan situasi di mana A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, tetapi B dan C tidak saling lepas.
    c. Gambarlah diagram Venn yang menyatakan situasi di mana A dan B tidak saling lepas, A dan C tidak saling lepas, dan B dan C tidak saling lepas.

    Gunakan diagram yang sesuai untuk membantu kalian menuliskan sebuah aturan penjumlahan yang kalian dapat gunakan untuk menentukan ketika
    d. A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, dan B dan C adalah saling lepas.
    e. A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, tetapi B dan C tidak saling lepas.
    f. A dan B tidak saling lepas, A dan C tidak saling lepas, dan B dan C tidak saling lepas.

Refleksi

Dalam bab ini, kalian sudah belajar bagaimana menentukan peluang menggunakan ruang sampel dari kejadian yang hasilnya sama kemungkinannya. Ayo refleksikan kembali dengan menjawab pertanyaan berikut.

1. Apa itu distribusi peluang?
2. Apa itu kejadian yang saling lepas? Berikan contoh dua kejadian yang saling lepas. Berikan dua contoh kejadian yang tidak saling lepas.

Bagaimana menentukan ketika A dan B saling lepas dan ketika tidak saling lepas?

Uji Kompetensi

1. Sebuah dadu dilempar, berapa peluang mendapatkan hasil berikut?
   a. 4
   b. 4 atau lebih
   c. Kurang daripada 4
   d. Bilangan genap
2. Dadu berbentuk oktahedral memiliki 8 sisi.

   Misalnya kalian melemparkan dua dadu oktahedral dengan masing-masing sisi tertulis angka 1 sampai 8.

Gambar 8.7 Gambar Dadu Berbentuk Oktahedral

   a. Buatlah ruang sampel yang menunjukkan semua kemungkinan hasil.
   b. Buatlah tabel distribusi peluang untuk jumlah kedua dadu tersebut.

c. Berapa peluang mendapatkan jumlah 8? Setidaknya jumlah 8?

d. Buatlah tabel distribusi peluang untuk nilai absolut dari selisih kedua dadu tersebut.

e. Berapa peluang mendapatkan selisih 6? Setidaknya selisih 6?

3. Untuk lemparan dua dadu berbentuk oktahedral, tentukan peluang kejadian berikut.

   a. Peluang mendapatkan angka yang sama atau berjumlah 7?

   b. Peluang mendapatkan angka yang sama atau berjumlah 8?

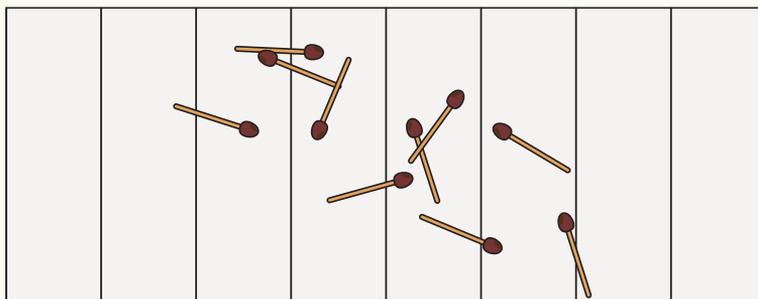
   c. Peluang mendapatkan jumlah 7 atau jumlah 8?

Materi Pengayaan: (Proyek Aktivitas ICT)

Percobaan Jarum Buffon

Dalam aktivitas ini, kalian akan menggunakan aplikasi *spreadsheet*, misalnya *Microsoft Excel*.

Bangsawan Prancis Le Comte de Buffon menciptakan sebuah percobaan peluang sebagai berikut:

1. Ukurlah panjang sebatang korek api (dengan bagian kepala dipotong) seakurat mungkin.
2. Pada sebuah kertas kosong gambarlah serangkaian garis yang saling sejajar. Jarak antara setiap garis haruslah sama panjangnya dengan batang korek api.
3. Ambillah sepuluh batang korek api yang sama panjangnya dan jatuhkan secara acak di atas kertas. Hitunglah jumlah korek api yang memotong atau menyentuh garis manapun. Sebagai contoh dalam gambar berikut, jumlah korek api yang memotong atau menyentuh garis adalah enam.

4. Ulangi percobaan sembilan kali lagi, dan catat hasilnya, sehingga keseluruhan kalian telah menjatuhkan 100 korek api.

5. Buatlah *spreadsheet* yang mirip dengan yang di bawah ini dan masukkan hasil kalian pada cell B2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Jumlah dijatuhkan (N)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	Jumlah korek memotong/ menyentuh garis (n)										
3	Peluang memotong garis (p = n/N)										
4	2/p										

6. Ulangi menjatuhkan 100 korek api lagi, sehingga total ada 200 kali, dan masukkan hasil kumulatif pada cell C2.
7. Dengan menggabungkan hasil dengan siswa lain, masukkan hasil kumulatif menjatuhkan korek api 300-1.000 kali di masing-masing cell D2-K2.
8. Dengan menggunakan rumus yang sesuai, gunakan *spreadsheet* untuk menyelesaikan perhitungan di Baris 3 dan 4.
9. Gunakan *spreadsheet* untuk membuat plot grafik garis dari N terhadap 2/p.
10. Nilai apa yang 2/p semakin mendekati?

Sumber: https://www.mathsisfun.com/activity/buffons-needle.html

Indeks

P

R

S

T

U

V

Glosarium

barisan bilangan: merupakan kumpulan bilangan yang memiliki urutan dan disusun menurut pola tertentu.

cosinus: perbandingan nilai sisi samping dan sisi miring sebuah sudut pada segitiga siku-siku.

clinometer: alat sederhana untuk mengukur sudut elevasi atau sudut depresi.

deret bilangan: penjumlahan suku-suku pada barisan bilangan.

deret divergen: deret bilangan yang tidak dapat ditentukan jumlahnya.

deret konvergen: deret bilangan yang dapat ditentukan jumlahnya.

distribusi peluang: deskripsi dari semua kemungkinan hasil dari situasi acak, bersama dengan peluang terjadinya masing-masing.

diskriminan: pembeda jenis-jenis akar persamaan kuadrat.

eksponen: nilai yang menunjukkan derajat kepangkatan suatu bilangan.

fungsi eksponen: fungsi berbentuk perpangkatan dengan variabel bebasnya adalah pangkat dari konstanta fungsi tersebut.

fungsi kuadrat: adalah fungsi suku banyak dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.

kejadian saling lepas: kejadian di mana tidak mungkin untuk terjadi pada hasil yang sama.

logaritma: operasi kebalikan dari eksponen atau perpangkatan.

peluang: kemungkinan yang mungkin terjadi/muncul dari sebuah peristiwa.

***P*(*A dan B*):** peluang bahwa kejadian *A* dan *B* terjadi pada hasil yang sama.

***P*(*A atau B*):** peluang bahwa kejadian A atau B terjadi.

pertumbuhan eksponen: peningkatan secara eksponensial pada kurun waktu tertentu.

peluruhan eksponen: penurunan secara ekponensial pada kurun waktu tertentu.

ruang sampel: himpunan semua kemungkinan hasil yang didapatkan dari suatu percobaan peluang.

median: nilai data yang berada tepat di tengah Ketika seluruh data diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar.

modus: data yang paling sering muncul atau memiliki Frekuensi paling besar.

jangkauan: selisih antara data terkecil dengan data terbesar.

***line plot*:** garis bilangan dengan banyaknya tanda X menunjukkan banyaknya data yang muncul dengan nilai tertentu.

***mean*:** bilangan yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata ke seluruh anggota dari kumpulan data.

kuartil: membagi kumpulan data menjadi 4 bagian sama besar.

linear: semua variabelnya berpangkat satu.

persamaan: kalimat terbuka yang memuat hubungan sama dengan "=".

persentil: membagi kumpulan data menjadi 100 bagian sama besar.

pertidaksamaan: kalimat terbuka yang memuat hubungan tidak sama dengan (bisa berupa “≠”, “<”, maupun “>”).

pola bilangan: susunan angka-angka yang membentuk pola tertentu.

rasio: nilai perbandingan antara dua bilangan pada barisan dan deret geometri.

resultan: hasil penjumlahan atau pengurangan vektor.

sinus: perbandingan nilai sisi depan dan sisi miring sebuah sudut pada segitiga siku-siku.

sistem: simultan.

solusi: nilai yang membuat persamaan (atau sistem persamaan) bernilai benar.

sumbu simetri: garis sumbu yang melalui titik puncak fungsi kuadrat.

tangen: perbandingan nilai sisi depan dan sisi samping sebuah sudut pada segitiga siku-siku.

theodolit: alat pengukur sudut yang biasa digunakan oleh juru tanah.

titik puncak: titik terendah atau titik tertinggi pada fungsi kuadrat.

trigonometri: studi pola bermakna mengenai hubungan antara sudut dan sisi segitiga.

vektor ruas: garis berarah atau besaran yang mempunyai besar dan arah.

vektor lawan: vektor yang besarnya sama tetapi berlawanan arahnya dengan suatu vektor.

vektor posisi: vektor yang berpangkal di O dan berujung di suatu titik dalam sistem koordinat.

vektor satuan: vektor yang bernilai 1 satuan.

Daftar Pustaka

Attwood, G., Bettison, I. 2019. *Pearson Edexcel International A Level: Statistics 1.* Pearson Education Limited.

Batanero, C., J Chernoff, E., Engel, J., Lee, H.S., & Sánchez, E. 2016. *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer Nature.

Brahier, D.J. 2020. *Teaching Secondary and Middle School Mathematics.* Routledge.

Brumbaugh, D.K., & Rock, D. 2010. *Teaching Secondary Mathematics*. Routledge.

Foster, C. 2012. *The Essential Guide to Secondary Mathematics: Successful and Enjoyable Teaching and Learning*. Routledge.

Goos, M., Vale, C., Stillman, G., Makar, K., Herbert, S., & Geiger, V. 2020. *Teaching Secondary School Mathematics: Research and Practice for The 21st Century.* Routledge.

Hirsch, C. R. 2008. Core-plus Mathematics: *Contemporary Mathematics in Context. Course 1 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.

Hirsch, C. R. 2008. *Core-plus Mathematics: Contemporary Mathematics in Context. Course 2 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.

Jones, G. A. (Ed.). 2006. *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.

Johnston-Wilder, S., & Pimm, D. 2004. *Teaching Secondary Mathematics with ICT.* McGraw-Hill Education (UK).

Larson, R. 2011. *Algebra and Trigonometry, eighth edition*. Cengage Learning.

Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. 2007. *Discovering Algebra: An Investigative Approach, Second Edition.* Key Curriculum Press.

Pimentel, R., Wall, T. 2013. *Mathematics Core and Extended*, 3rd Edition. Cambridge IGCSE, Hodder Education

https://www.forbes.com/sites/naomirobbins/2012/01/04/a-histogram-is-not-a-bar-chart/?sh=13ebb1326d77

https://corona.jakarta.go.id/id/data-pemantauan

https://www.mathsisfun.com/activity/buffons-needle.html. Diunduh tanggal 18 Januari 2021 pukul 22.00 WIB.

https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vectors_in_Space/12.1%3A_Vectors_in_the_Plane. Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

https://www.maths.usyd.edu.au/u/MOW/vectors/vectors-7/v-7-1.html. Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

Sharma, R.D. 2001. *Objective Mathematics Textbook*. Dhanpat Rai Publications (P) Ltd.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. 2015. *Algebra and Trigonometry.* Cengage Learning.

Sutisna, E., 2020. *Modul Pembelajaran SMA, Matematika Peminatan Kelas X.* Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Indonesia.

Tan, S. 2008. *College Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences, seventh edition.* Thomson Brooks/Cole.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. 2013. *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based Guidance for Ages 9-19*. OUP Oxford.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., & Liew, J. 2013. *New Syllabus Mathematics Textbook 1*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., & Chow, I. 2013. *New Syllabus Additional Mathematics Textbook*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Daftar Sumber Gambar

https://indonesia.go.id/ragam/pariwisata/pariwisata/jembatan-youtefa-bukti-sumpah-membangun-papua Diunduh tanggal 28 Januari 2021 pukul 20.00 WIB

https://unsplash.com/photos/PaFEcOj8Kqo. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.10 WIB

https://unsplash.com/photos/k0KRNtqcjfw. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.12 WIB

https://unsplash.com/photos/4pc1GpZhJP0. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.14 WIB

https://unsplash.com/photos/j2c7yf223Mk. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.17 WIB

https://unsplash.com/photos/BnzqQwerUOY. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.20 WIB

https://unsplash.com/photos/FUAe5yjwqXc. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.25 WIB

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Garuda_Indonesia,_Boeing_777-300ER,_PK-GIG_-_NRT.jpg. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.30 WIB

https://www.google.co.id/maps/@2.6132654,108.4252641,4843020m/data=!3m1!1e3. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.32 WIB

https://unsplash.com/photos/_1fByLYHA_0. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.35 WIB

https://unsplash.com/photos/keHNwiEsJQs. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.38 WIB

https://www.pexels.com/photo/green-leafed-tree-1146706/. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.40 WIB

https://pixabay.com/photos/hamburger-burger-fast-food-2201748/. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.45WIB

https://kissclipart.com/french-fries-0q2q9m/ . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.50 WIB

https://www.freepik.com/free-photo/glass-cola-with-ice_1179448.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.52 WIB

https://www.freepik.com/free-vector/combo-meals-poster_10346331.htm#page=1&query=combo+menu&position=2 . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.54 WIB

https://www.freepik.com/free-psd/brochure-concept-mock-up_8300291.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.00 WIB

https://unsplash.com/photos/Ll9RwiWfQW8 . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.10 WIB

https://www.freepik.com/free-psd/blank-screen-concept-mock-up_9156419.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.15 WIB

https://www.freepik.com/free-vector/dos-don-ts-prevention-infographic_7745036.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.17 WIB

https://covid19.go.id/peta-sebaran-covid19. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.06 WIB

https://unsplash.com/photos/-VjeHVFSl38 . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.10 WIB

https://unsplash.com/photos/el-LuI0mVLo . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.15 WIB

https://www.freepik.com/free-photo/shining-sun-clear-blue-sky_945129.htm . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.17 WIB

https://unsplash.com/photos/Zp7ebyti3MU . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.20 WIB

https://www.pexels.com/photo/blood-bags-on-white-background-4531304. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.25 WIB

https://gudanglampuku.com/wp-content/uploads/2018/11/tiang-penunjuk-arah-jogja-2.jpg. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.27 WIB

Sumber: http://kebunrayadaerah.krbogor.lipi.go.id/kebun-raya-kuningan.html Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.30 WIB

https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.32 WIB

https://goo.gl/maps/hvGqjkmLSGBnADwL9. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.35 WIB

https://www.waze.com/live-map. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.37 WIB

https://www.flightradar24.com/ Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.39 WIB

https://pixabay.com/photos/construction-surveyor-road-4216751/ Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.42 WIB

https://unsplash.com/photos/HcgK4WoBwzg Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.45 WIB

https://pixabay.com/photos/rumah-gadang-padang-indonesia-4914211/ Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.47 WIB

https://indonesia.go.id/ragam/pariwisata/pariwisata/jembatan-youtefa-bukti-sumpah-membangun-papua Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.50 WIB

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Monopoly_board_on_white_bg.jpg. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.52 WIB

https://unsplash.com/photos/4aB1nGtD_Sg Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.55 WIB

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snakes_and_Ladders_board.jpg Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.57 WIB

Shaurya Sagar - https://unsplash.com/photos/5cwvT0BSgIYDiunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 21.00 WIB

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D
E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id
Akun Facebook : Dicky Susanto
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI. Jl. Industri Blok B14 Kav. 1 Kemayoran, Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004-2009)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002-2003)
3. S1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992-1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020-2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. "Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory" (2020)

Nama Lengkap : Theja Kurniawan
E-mail : theja.kurniawan@santa-laurensia.sch.id
Akun Facebook : Theja Kurniawan
Alamat Kantor : Jalan Sutera Utama No. 1, Alam Sutera, Tangerang Selatan 15325
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Kepala SMA Santa Laurensia (2013-sekarang)
2. Head of Mathematics Department, Sekolah Santa Laurensia (2006-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan, Universitas Pelita Harapan (2005-2007)
2. S2: Program Studi Manajemen Operasi, PPM (1999-2001)
3. S1: Program Studi Teknik Sipil, Universitas Tarumanagara (1994-1999)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Tidak ada.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Savitri Sihombing, M.Sc.
E-mail : savitri.sihombing@gmail.com
Akun Facebook : Savitri K. Sihombing
Alamat Kantor : Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri Jalan Scientia Boulevard Barat Blok DRWB no 8 Sektor Ruko Darwin, Summarecon Serpong Tangerang, Banten 15334
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003-2005)
2. S1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996-2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.

5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku, Modul,* Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Eunice Salim, M.Ed.
E-mail : esalim@asu.edu
Akun Facebook : Eunice Salim
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 13, RMCI. Jl. Industri Blok B14 Kav. 1. Kemayoran, Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. *Chief Networking Officer*, Paideia Educational Solutions, Bali, Indonesia (2020-sekarang)
2. Staf Kurikulum, Sekolah Kristen Calvin, Jakarta, Indonesia (2019-sekarang)
3. Guru Kelas 4 SD, Indian Hills Elementary, Gallup, USA (2016-2019)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Learning Design and Technologies, Arizona State University, Phoenix, USA (2017-2019)
2. S1: Program Studi Elementary Math Education, Calvin University, Grand Rapids, USA (2012-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 4 Perasaanku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 4 Siklus Air*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 4 Siklus Air,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.

14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 4 Pelangi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 4 Pelangi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 4 Bekerja di Laut,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 4 Bekerja di Laut*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 4 Merayakan Keberhasilan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 4 Merayakan Keberhasilan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Marianna Magdalena Radjawane, M.Si.
E-mail : marianna.radjawane@gmail.com
Akun Facebook : Marianna Magdalena Radjawane
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan IPAC

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020-sekarang)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013-sekarang)
3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013-2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2011-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990-1993)
2. S1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983-1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan*

Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 3 Merawat Hewan dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 3 Merawat Hewan dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 3 Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 3 Pulauku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 3 Karakteristik Benda Cair*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 3 Karakteristik Benda Cair,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 3 Awan, Modul,* Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 3 Awan, Modul*, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 3 Petani,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 3 Petani,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 3 Hari Istimewa Keluarga*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 3 Hari Istimewa Keluarga, Modul*, Kemdikbud, Jakarta.
20. *Contributor in Excel in Science Grade 4*, Oxford University Press (2018)
21. *Science Gasing Kelas 3-6*, Penerbit Kandel (2013)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Ummy Salmah, M.Pd.,M.Sc
E-mail : ummy.salmah@staff.qitepinmath.org
Akun Facebook : Ummy As Syifa
Alamat Kantor : L. Kaliurang KM 6, Sambisari, Condongcatur, Depok Sleman, DIY
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah UIN Alauddin Makassar (2016-2017)
2. Training Specialist, SEAMEO Regional Centre for QITEP in Mathematics, Yogyakarta (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Science and Mathematics Education, Curtin University (2015)
2. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
3. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Makassar (2006-2010)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 1 Keluarga*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.

14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Apriana Toding, Ummy Salmah, Heribertus Rinto Wibowo (2020) *Modul Pembelajaran Jarak Jauh. Implementasi Teknology MIMO Relay System sebagai Inovasi IoT dalam Mendukung Pembelajaran Jarak Jauh di Daerah 3T pada Kondisi Covid di Indonesia* (Proyek Ideathon Indonesia 2020).
18. Darmowijoyo dan BIMPoME 2012 (2013), *Persamaan Diophantine dan Aplikasinya*. Unit Perpustakaan PPS Universitas Sriwijaya, Palembang.
19. BIMPoME 2012 (2013), *Pemecahan Masalah Matematika*. Excellent Publishing, Palembang.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "STEM+Computational Thinking" (2021-sedang dalam proses)
2. "Teaching Mathematics during Pandemic" (Teacher Perceptions) (2020)
3. "Mathematics Teachers' Perception and Readiness in Implementing STEM Education" (2017)
4. "Mathematics and Science Teachers' Perceptions and Readiness in Implementing Curriculum 2013 in Indonesia" (2015)
5. "Desain Pembelajaran Penjumlahan Bilangan 1-20 dengan Melibatkan Kemampuan Struktur Spasial (*Spatial Structuring Ability*) Siswa Kelas 1 Sekolah Dasar"(2014)

Nama Lengkap : Ambarsari Kusuma Wardani, M.Pd.
E-mail : ambarsariks_uin@radenfatah.ac.id
Akun Facebook : Ambar Kusuma
Alamat Kantor : Jl. Prof. K. H. Zainal Abidin Fikri, Km 3.5, Palembang.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Raden Fatah Palembang (2016-sekarang)
2. Guru Matematika, SMA Negeri 17 Palembang (2014-2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
2. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2007-2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 4 Perasaanku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 1 Keluarga*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 1 Tanaman yang Tumbuh di Lingkungan Saya*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 1 Kegunaan Pancaindra, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 1 Kegunaan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 1 Merawat Diri Sendiri*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 1 Merawat Diri Sendiri*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 1 Denah Rumahku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 1 Denah Rumahku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 1 Karakteristik Benda Padat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 1 Karakteristik Benda Padat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 1 Matahari dan Bumi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 1 Matahari dan Bumi, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 1 Pelayanan Jasa*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 1 Pelayanan Jasa*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 9 Perayaan Subtema 1 Hari Raya Agama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 1 Hari Raya Agama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 1 Hari Raya Agama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
20. Darmowijoyo dan BIMPoME 2012 (2013), *Persamaan Diophantine dan Aplikasinya.* Unit Perpustakaan PPS Universitas Sriwijaya, Palembang.
21. BIMPoME 2012 (2013), *Pemecahan Masalah Matematika*. Excellent Publishing, Palembang.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. “Pengembangan Soal Pemecahan Masalah Matematika dengan Konteks Islami untuk Siswa Sekolah Menengah Pertama” (2020)
2. “Profil Soal Model PISA Pada Tugas Akhir Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika UIN Raden Fatah Palembang” (2019)
3. “Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis melalui Pendekatan Matematika Realistik bernuansa Etnomatematik Suku Anak Dalam (PMRE SAD)” (2018)
4. “Penerapan Desain Pembelajaran Tematik Integratif pada Kelas VI SD Materi Nilai Rata-Rata” (2016)
5. “Pengembangan Soal Model PISA untuk Program Pengayaan SMP” (2014)

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
E-mail : sunardi.fkip@unej.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jalan Kalimantan Nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
2. (1983–sekarang)
3. Dosen Penguji Disertasi S3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya (2016–sekarang)
4. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007–2016)
5. Ketua Tim Pengembangan Kurikulum Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (2006)
6. Guru Matematika di SMA (1981–1985)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya tahun masuk 1999
2. S2: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1992
3. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir):

1. *Buku Guru dan Buku Siswa Matematika untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X* (2019)
2. *Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII* (2018) (Editor)
3. *Matematika Fisika 1* (2018)
4. *Matematika Fisika 2* (2018)
5. *Strategi Belajar Mengajar IPA* (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. *Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi, dan Fungsi* (2018)
2. *Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang* (2014)
3. *Strategi Belajar Mengajar Matematika* (2012)
4. *Model of Teaching and Learning* (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. "Development of the Spatial Visual Oriented Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Elementary Students" (2020)
2. "The Development of Tangram-Based Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Junior High School Students in Solving Two-Dimentional Figure Problems" (2020)
3. "The Geometry Anxiety of Students' Visualization, Analysis, and Informal Deduction Levels in Solving Geometry Problem" (2019)
4. "The Profile of Student's Anxiety in Solving the Critical Thinking Problem on Geometry According to Van Hiele Theory" (2019)
5. "Developing Rom (Realistic Outdoor Mathematics) Learning Model For Elementary School Students" (2018)
6. "Characteristics of Students' Metacognition Process At Informal Deduction Thinking Level in Geometry Problems" (2018)
7. "Analysis of Students' Mathematics Performance in Solving the PISA Standard Based Test Item Using a Qualitative Content Analysis Method" (2018)
8. "Thinking Process of Visual-Spatial Intelligence of 15-Year-Old Students in Solving PISA Standard Problems" (2018)
9. "Mathematical Communication Process of Junior High School Students Based on Keirsey Personality Type In Solving Open Geometry Problems" (2018)
10. "The Identification of van Hiele Level Students on the Topic of Space Analytic Geometry" (2018)
11. "Spatial Intelligence on Solving Three Dimensional Geometry Object Through Project Based Learning" (2018)
12. "Developing Mathematics Learning Model Using Realistic Approach and Outdoor Environment for Elementary School Students" (2018)
13. "Ethnomathematics Activities of Coffee Farmers in Sidomulyo Jember Area as Project Student Sheet" (2018)
14. "The Uniqueness of Visual Levels in Resolving Geometry Shape and Space Content Based on Van Hiele's Theory" (2018)

15. “The Students’ Thinking Process on Mathematics Problem Solving Through Scaffolding” (2017)
16. “The Thinking Process in Constructing the Concepts of Linear Quantitatives Two Variable” (2017)
17. “Student’s Mathematics Creative Thinking Skill in Terms of Logical Mathematical Intelligence” (2017)
18. “Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Realistik Terintegrasi Pendekatan Saintifik Berbasis Lingkungan Luar Kelas pada Topik Kesebangunan bagi Siswa SMP” (2016)
19. “Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Realistik Luar Sekolah Berbasis Lingkungan dan Budaya Khas Jember untuk Meningkatkan Pendidikan Karakter Unggul bagi Siswa SMK” (2014)
20. “Pengembangan Karakter Teliti, Konsisten, dan Kreatif pada Siswa SMP Melalui Pembelajaran Geometri dengan Pendekatan Realistic Mathematics Education Berbasis Lesson Study” (2013)
21. “Pengembangan Model Pembelajaran Kreatif dan Inovatif untuk Meningkatkan Kualitas Proses Pembelajaran dan Hasil Belajar Mata Pelajaran Ujian Nasional Siswa SMA di wilayah Provinsi Jawa Timur 3” (2012)
22. “Penguasaan Siswa Terhadap Kompetensi Mata Pelajaran Ujian Nasional, Gambaran Keberhasilan, Kegagalan, dan Faktor Penyebab serta Alternatif Solusinya di Wilayah Provinsi Jawa Timur 3” (2011)

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
E-mail : alazhari.masta@upi.edu
Akun Facebook : Al Azhary Masta
Alamat Kantor : FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No .229, Isola, Kec. Sukasari, Kota Bandung, Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Dosen Program Studi S1 Program Studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015–sekarang)

2. Dosen LB Universitas Telkom Tahun (2013–2019)
3. Pembina Tim Olimpiade SMP Provinsi Jawa Barat Tahun 2013–2019
4. Pembina ON MIPA Mahasiswa Universitas Pendidikan Indonesia Tahun 2013 s.d sekarang.
5. Ketua Riset Bidang Analisis Departemen Pendidikan Matematika FPMIP UPI Tahun 2021–sekarang.
6. Pembina Team SMP Kemendikbud pada Bulgaria International Mathematics Competition (BIMC) Tahun 2013
7. Pembina Team SMP Kemendikbud pada AITMO (Asian Inter-cities Teenagers Mathematics Olympiad) Tahun 2013
8. Pembina Team SMP Kemendikbud pada Korea International Mathematics Competition (KIMC) Tahun 2014

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, Institut Teknologi Bandung, tahun masuk 2013
2. S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung, tahun masuk 2011
3. S1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, tahun masuk 2007

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. *Buku digital pusat perbukuan untuk Program kelas IV, V, dan VI* (2019)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. *Math Project untuk SD/MI Kelas I: Pembelajaran Matematika Berbasis Saintifik* (2014)
2. *Math Project untuk SD/MI Kelas IV: Pembelajaran Matematika Berbasis Saintifik* (2014)
3. *Math Project untuk SD/MI Kelas VII: Pembelajaran Matematika Berbasis Saintifik* (2014)
4. *Buku Guru dan Buku Siswa Matematika untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X* (2019)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "A Note on Inclusion Properties of Weighted Orlicz Spaces" (2020)
2. "Several Properties of Discrete Orlicz Spaces" (2020)
3. "A Note on Generalized Holder's Inequality in p-summable Sequence Spaces" (2020)
4. "Hölder's Inequality in Discrete Morrey Spaces" (2020)

5. “Generalized Holder’s Inequality in Orlicz Sequence Spaces” (2020)
6. “Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Holder pada Ruang Barisan Orlicz” (2020)
7. “Third Version of Weak Orlicz–Morrey Spaces and Its Inclusion Properties” (2019)
8. “Sufficient and Necessary Conditions for Generalized Hölder’s Inequality in p-summable Sequence Spaces” (2019)
9. “Sufficient and Necessary Conditions for Holder’s Inequality in Weighted Orlicz Spaces” (2019)
10. “Generalized Holder’s Inequality in Orlicz Spaces” (2019)
11. “The Sufficient Condition for Inclusion Properties of Discrete Weighted Lebesgue Spaces” (2018)
12. “Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Function” (2018)
13. “Generalized Holder’s Inequality in Morrey Spaces” (2018)
14. “On Inclusion Properties of Two Versions of Orlicz-Morrey Spaces” (2018)
15. “Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue Lemah dan Ekuivalensinya dengan Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue” (2018)
16. “An inclusion Property of Orlicz and Weak Orlicz Spaces” (2017)
17. “Inclusion Properties of Generalized Morrey Spaces” (2017)
18. “An Inclusion Property of Orlicz-Orlicz Spaces” (2017)
19. “Uniformly Convex and Strictly Convex Orlicz Spaces” (2015)
20. “An Inclusion Property of Orlicz Spaces” (2015)

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap	:	Faris Majduddin Naufal, S.M
E-mail	:	farismnaufal@gmail.com
Akun Facebook	:	Faris Naufal
Alamat Kantor	:	Monoponik Studio. Jl. Otto Iskandar Dinata No. 458, Bandung
Bidang Keahlian	:	Desain Grafis & Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Co Founder & Principal Designer, Monoponik Studio (2012-sekarang)
2. Marketing Staff (Internship), Mahanagari Nusantara (2012)
3. Visual Artist / Illustrator (2010-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Manajemen Bisnis, Telkom University (2009-2015)

Karya/Pameran/Eksibisi dan Tahun Pelaksanaan (10 tahun terakhir)

1. 111 Buya Hamka Exhibition, Universitas Al Azhar, Jakarta (2019)
2. All The Small Things, Qubicle, Jakarta (2017)
3. Seek A Seek Exhibition (with Monoponik), Dia.Lo.Gue, Jakarta (2016
4. Reset Collective Exhibition, N-Workshop, Yogyakarta (2016)
5. Super Robot Day, Bandung (2015)
6. Canstop, Gardu House, Jakarta (2014)
7. Rupanada (with Monoponik), Jogja Gallery, Yogyakarta (2014)
8. 10th Pictoplasma, Berlin, Jerman (2014)
9. Ace&King (Aceking Sketch Squad), Sanggar Mitra, Bandung (2014)
10. Odessa Draw, Odessa, Ukraina (2013)
11. Indonesia Kreatif (PPKI), Epicentrum Walk, Jakarta (2012)
12. Indonesia Kreatif (PPKI), JEC, Jakarta (2011)
13. Postcard Untuk Sahabat (Tugitu Unite), Gedung Kesenian Solo, Solo (2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "*Pengaruh Word of Mouth Marketing* Melalui Media Twitter @ FLAMEONfootmate Terhadap Keputusan Pembelian Konsumen Tahun 2014" (2015)

Biodata Penyunting Naskah

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Akun Facebook : Tri Hartini
Alamat Kantor : -

Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proof read

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

Menjadi editor lepas di beberapa penerbit di Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

Fakultas Sastra/Ilmu Budaya Universitas Gadjah Mada Yogyakarta (1992-1998) jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

Salam 3 Jari Leadership ala Jokowi. 2014. Yogyakarta: Penerbit Kanisius

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

Tidak ada

Buku yang Pernah ditelaah, direviu, dibuat ilustrasi dan/atau dinilai (10 tahun terakhir):

Tidak ada

Informasi Lain

selama 20 tahun bekerja sebagai editor, telah menyunting banyak buku dengan berbagai jenis tema seperti keagamaan, politik, sains, humaniora (filsafat, sosial, hukum, bahasa, sastra, seni) dan lain-lain, baik naskah asli maupun terjemahan, di beberapa penerbit di Yogyakarta

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
E-mail : muhafir@gmail.com
Akun Facebook : Muhammad Firdaus Tjl
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Desain Grafis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020-2021)
2. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019-2020)
3. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018-2019)
4. *Audio Visual Designer* di Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016-2018)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Penduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, jakarta

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.